Att undervisa och studera matematik med datoralgebraprogrammet Maxima

Per Jönsson och Thomas Lingefjärd

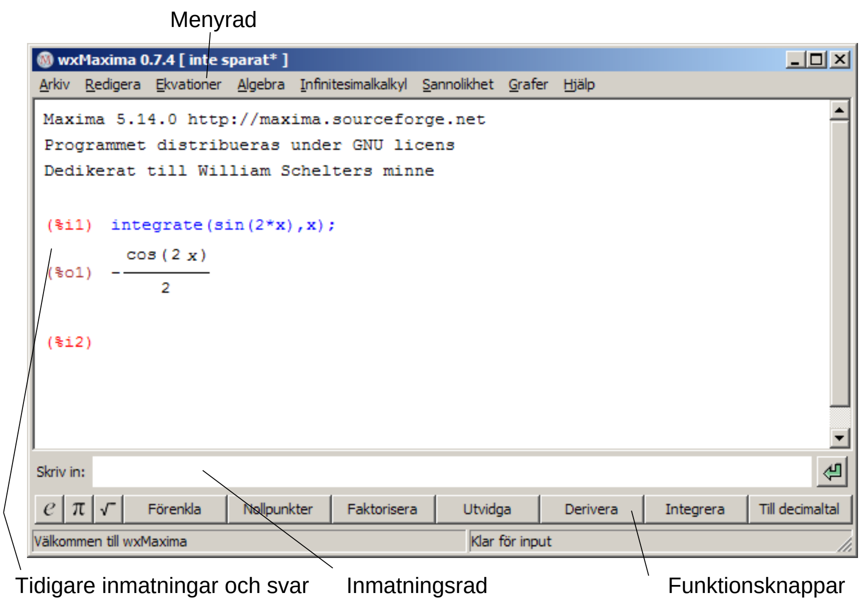
Malmö och Göteborg 2009

1 Kort om Maxima

Begreppet CAS (computer algebra system) eller på svenska datoralgebrasystem, har funnits relativt länge. På svenska och utländska universitet har program som Maple, Mathematica och Matlab dominerat. I svenska gymnasieskolor har Derive och symbolhanterande miniräknare varit vanligare. Maxima är ett datoralgebrasystem som ursprungligen är utvecklat vid MIT i USA. Maxima finns för både Windows, Mac och Linux och distribueras under GNU Public License, vilket innebär att programmet får användas fritt av lärare och studenter. Följande introduktion behandlar en version av Maxima med ett förenklat gränssnitt som anpassats till främst gymnasieskolans kurser. Detta gränssnitt har utvecklats av den norske matematikern Bjørn Ove Thue och översatts till svenska av författarna till denna text. För att ladda ner denna version av Maxima går man in på `www.moglestu.vgs.no/maxima/`. Där kan man också finna denna text. Den amerikanska standardversionen av Maxima finns på `http://maxima.sourceforge.net/`. För en omfattande dokumentation av denna version hänvisar vi till Per Jönsson, *Matematik med datoralgebrasystem*, Studentlitteratur 2008.

2 Maximas arbetsfönster

Maxima startas genom att dubbelklicka på ikonen med texten wxMaxima. Vid starten kommer ett fönster, vilket är illustrerat i figur 1, att öppnas. Fönstret är Maximas arbetsfönster och har flera olika funktioner.



Figur 1: *Maximas arbetsfönster. Kommandon ges på inmatningsraden. Kommandon kan även ges genom att använda funktionsknapparna eller rullgardinsmenyerna.*

Kommando skrivs på inmatningsraden och utförs när ”Return”-tangenten (⟵) trycks ned. I det följande kommer vi inte att skriva ut returnkommandot eftersom detta ger svårläst text. Kommando kan också ges genom att använda funktionsknapparna eller genom att gå in i rullgardinsmenyerna och välja lämpligt kommando.

3 Räkning med tal

Maxima har fem aritmetiska operatorer.

`^`	potens (upphöjt till)	prioritet 1
`*`	multiplikation	prioritet 2
`/`	division	prioritet 2
`+`	addition	prioritet 3
`-`	subtraktion	prioritet 3

Då två operatorer har samma prioritetsordning utförs beräkningarna från vänster till höger. Maxima ger exakta svar (och ej decimaltal) vid räkning med heltal och rationella tal. Kommandot för kvadratrötter är `sqrt`. Kvadratrötter för heltal och rationella tal representeras alltid på enklast möjliga form.

Exempel 3.1.

(a) För att beräkna $2 \cdot 3^2$ skriver vi

```
2*3^2
```

på inmatningsraden och trycker return. Eftersom `^` har högst prioritet börjar Maxima med att beräkna `3^2`. Sedan följer multiplikation med 2 och Maxima svarar

$$18$$

(b) Division och multiplikation har samma prioritet. Då vi skriver

```
1/2*3
```

på inmatningsraden börjar Maxima från vänster och beräknar 1/2 sedan följer multiplikation med 3, vilket ger svaret

$$\frac{3}{2}$$

(c) För att beräkna

$$\frac{15}{8} + \frac{12}{7} - \frac{1}{12}$$

skriver vi

```
15/8 + 12/7 - 1/12
```

vilket ger

$$\frac{589}{168}$$

(d) Talet $\sqrt{56}$ beräknas genom

```
sqrt(56)
```

vilket ger

$$2\sqrt{14}$$

□

4 Fördefinierade konstanter och symboler

I Maxima finns flera fördefinierade konstanter och symboler. Det finns också möjlighet att avrunda exakta värden till decimaltal.

`%pi`	$\pi \approx 3.14159$.
`%e`, `exp(1)`	$e \approx 2.71828$ (basen för naturliga logaritmen).
`%i`	$\sqrt{-1}$, imaginära enheten.
`inf`	∞ positiva oändligheten.
`minf`	$-\infty$ negativa oändligheten.
`float`	omvandlar ett exakt tal till decimaltal.

Maxima känner till exakta regler för en rad operationer med π och e. Symbolerna finns tillgängliga vi funktionsknapparna nere till vänster i arbetsfönstret. Det finns även en funktionsknapp för att omvandla resultatet till decimaltal.

Exempel 4.1.

(a) För att beräkna i^2 skriver vi

```
%i^2
```

Maxima känner till reglerna för räkning med den imaginära enheten och svarar

-1

(b) Roten ur ett negativt tal ger komplexa värden. För att beräkna $\sqrt{-4}$ skriver vi

```
sqrt(-4)
```

vilket ger svaret

2 `%i`

(c) Logaritmfunktionen ln betecknas `log` i Maxima. Då vi beräknar naturliga logaritmen av e

```
log(%e)
```

får vi svaret

1

(d) För att omvandla talet $\pi/2$ till decimaltal ger vi kommandot

```
float(%pi/2)
```

Maxima svarar

1.570796326794897

Alternativt (prova gärna det) kan man skriva in $\pi/2$ på inmatningsraden och sedan trycka på knappen *Till decimaltal* nere till höger. □

5 Funktionsknappar för algebra

Det finns flera kommandon för att skriva om och manipulera uttryck. Vi tar här upp några av de viktigaste. Kommandona motsvaras av funktionsknappar. För att få mera information om ett kommando skriver man ett frågetecken följt av kommandot på inmatningsraden. Maximas dokumentationssidor på engelska kommer då upp.

Utvidga	skriver ett symboliskt uttryck som en summa av produkter.
Faktorisera	faktoriserar ett uttryck i reella faktorer. Om uttrycket är ett heltal fås en uppdelning i primfaktorer.
Förenkla	förenklar rationella uttryck och funktioner som har rationella uttryck som argument.

Exempel 5.1.

(a) För att utveckla (utvidga) uttrycket $(5x + 4)^2$ skriver man

```
(5*x + 4)^2
```

på inmatningsraden och klickar på funktionsknappen *Utvidga* (se figur 2). Vi får då följande utskrift på skärmen

$$25\,x^2 + 40\,x + 16$$

(b) Uttrycket $x^3 + 2x^2 + x$ faktoriseras genom att skriva

```
x^3+2*x^2+x
```

och klicka på funktionsknappen *Faktorisera*. Maxima svarar genom att skriva ut

$$x\,(x+1)^2$$

(c) Vi har uttrycket

$$\frac{2}{3x+9} + \frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{2x-6}.$$

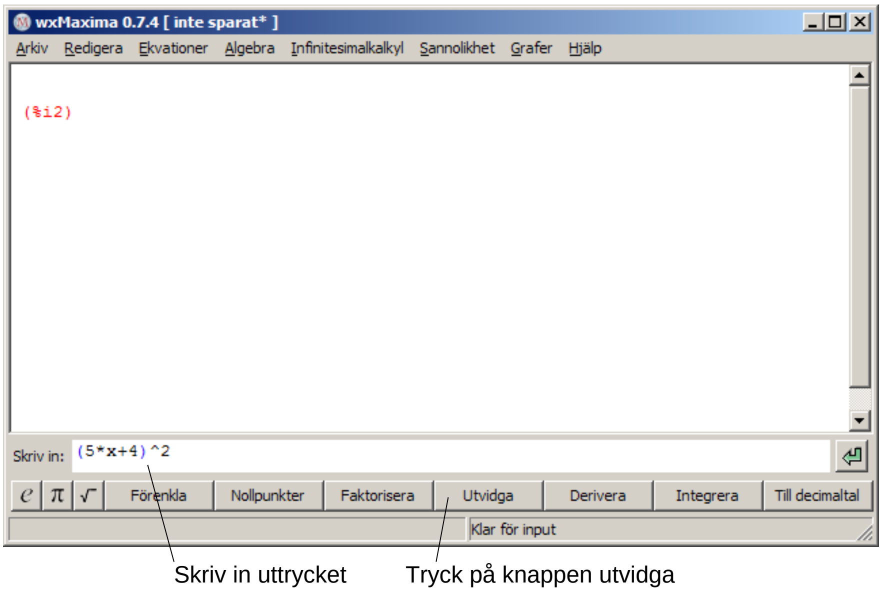
För att skriva uttrycket på gemensam nämnare skriver vi

```
2/(3*x+9) + x/(x^2-9) - 1/(2*x-6)
```

på inmatningsraden och trycker sedan på funktionsknappen *Förenkla*. Maxima svarar

$$\frac{7}{6\,x+18}$$

Funktionsknappen *Förenkla* kan också användas för att förenkla andra typer av uttryck. □



Figur 2: *För att utveckla* $(5x+4)^2$ *skriver man uttrycket på inmatningsraden och trycker sedan på knappen Utvidga.*

6 Funktioner

Maxima har ett antal standardfunktioner. Notationen liknar den man har på miniräknare.

`abs(x)`	ger absolutbeloppet $\|x\|$.
`sqrt(x)`	ger kvadratroten $\sqrt{x}$.
`exp(x)`	ger exponentialfunktionen e^x.
`log(x)`	ger naturliga logaritmen $\ln(x)$.
`sin(x)`	ger $\sin(x)$ där x måste vara i radianer.
`cos(x)`	ger $\cos(x)$ där x måste vara i radianer.
`tan(x)`	ger $\tan(x)$ där x måste vara i radianer.
`cot(x)`	ger $\cot(x)$ där x måste vara i radianer.
`asin(x)`	ger $\arcsin(x)$.
`acos(x)`	ger $\arccos(x)$.
`atan(x)`	ger $\arctan(x)$.

Utöver dessa funktioner finns även ett otal andra som är mindre vanliga. Vi återkommer till en del av dessa funktioner i de följande avsnitten. Förutom alla räkneregler som gäller för funktionerna så känner Maxima även till speciella värden som exempelvis $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ och så vidare.

Exempel 6.1.

(a) Om vi till exempel skriver

```
tan(%pi/3)
```

får vi

$$\sqrt{3}$$

(b) Talet $e \approx 2.71828$ ges i Maxima av `%e`. Då vi skriver

```
log(%e)
```

blir svaret

1

(c) Vi drar roten ur x^2 genom att skriva

```
sqrt(x^2)
```

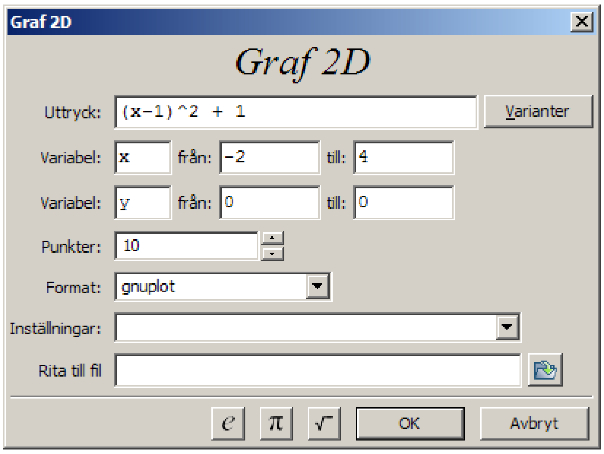
Svarsutskriften blir

$|x|$

Fundera på varför svaret inte blir x! □

7 Grafer

Det finns flera kommandon med vars hjälp man kan rita grafer i både 2D- och 3D. För att rita en vanlig graf i två dimensioner går vi in i rullgardinsmenyn *Grafer* och väljer *Graf 2D*. En inmatningsruta liknande den i figur 3 kommer då upp. Vi skriver in vårt funktionsuttryck tillsammans med gränserna i x-led och trycker på *OK* varvid vi får upp ett fönster med grafen. Genom att klicka på knappen *Varianter* i inmatningsrutan får man möjlighet att plotta punktdiagram. Om du ändrar formatet från gnuplot till intern, så dirigeras utskriften av grafen om. Prova detta!



Figur 3: *För att rita grafen skriver man in funktionsuttrycket och gränserna. Genom att klicka på knappen Varianter kan man plotta punktdiagram.*

Exempel 7.1

(a) Vi ska rita grafen till funktionen $f(x) = \sin x$ för $0 < x < 2\pi$ och börjar med att gå in i rullgardinsmenyn *Grafer* och välja *Graf 2D* så att inmatningsrutan kommer upp. Vi skriver in vårt funktionsuttryck

```
sin(x)
```

och matar in intervallgränserna 0 och 2π (skrivs som `2*%pi`). När detta är gjort trycker vi på *OK* varvid grafen till vänster i figur 4 kommer upp. Notera att vi kan rita flera grafer samtidigt om vi bara matar in motsvarande funktioner omgivna av hakparentes och separerade med komma. Till exempel ger

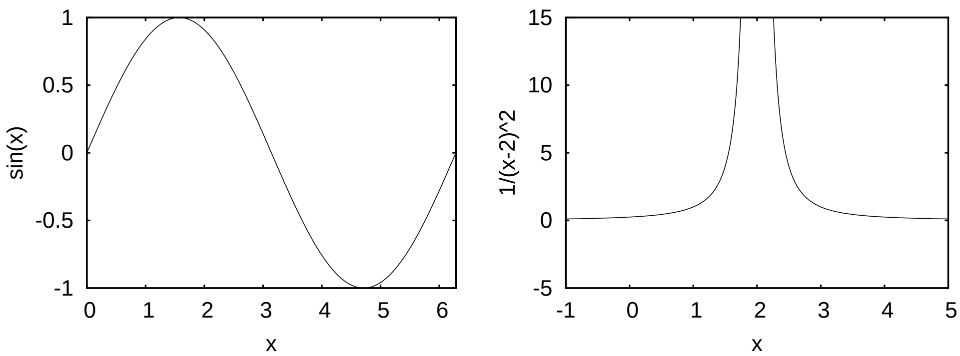
```
[sin(x),cos(x)]
```

grafen för både $\sin x$ och $\cos x$.

(b) Man kan själv definiera skalan i y-led. Då vi matar in funktionen

```
1/(x-2)^2
```

och låter x och y gå från -1 till 5, respektive från -5 till 15 får vi grafen till höger i figur 4. □



Figur 4: *Funktionerna* $y = \sin x$ *och* $y = 1/(x-2)^2$. *I grafen till höger har vi själv valt begränsningarna i* y*-led.*

8 Matematisk analys

I det här avsnittet skall vi titta på optionerna under rullgardinsmenyn *Infinitesimalkalkyl*. Dessa optioner är:

Integrera	integrera en funktion.
Derivera	derivera en funktion.
Finn gränsvärde	bestäm gränsvärdet.
Beräkna summan	beräkna summan.
Polynomdivision	dividera två polynom.
Partialbråksuppdelning	dela upp en rationell funktion i partialbråk.
Regression	anpassa funktion till datapunkter.

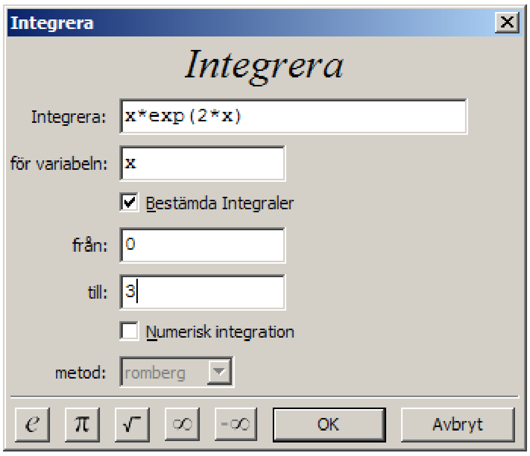
Exempel 8.1. Vi ska beräkna integralen

$$\int_0^3 xe^{2x}\,dx.$$

Vi går in i menyn *Infinitesimalkalkyl* och väljer *Integrera*. Ett fönster liknande det i figur 5 kommer då upp. Vi skriver in integranden xe^{2x}, klickar i rutan för bestämda integraler och skriver in integrationsgränserna 0 och 3. Då vi klickar på *OK* skriver Maxima ut

$$\frac{5\,e^6}{4} + \frac{1}{4}$$

Om man inte anger några integrationsgränser så får man den obestämda integralen (primitiva funktionen). Notera även att man kan beräkna integraler numeriskt genom att markera rutan *Numerisk integration*. □



Figur 5: *För att integrera en funktion matar man in integranden, klickar på rutan Bestämda Integraler och ger integrationsgränserna. Om man inte anger några integrationsgränser får man den primitiva funktionen.*

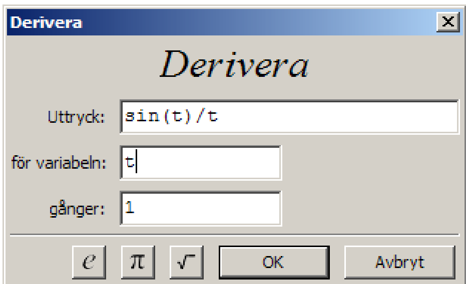
Exempel 8.2. Vi ska beräkna derivatan av funktionen

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Vi går in i menyn *Infinitesimalkalkyl* och väljer *Derivera*. Ett fönster liknande det i figur 6 kommer då upp. Vi skriver in integranden $\sin(t)/t$, ändrar till variabeln t (vi ska derivera med avseende på t i detta fall) och klickar på *OK*. Vi får svaret

$$\frac{\cos(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{t^2}$$

Vi kan sätta derivatan på gemensam nämnaren genom att klicka på knappen förenkla. För att derivera två gånger skriver vi 2 på raden *gånger*. □



Figur 6: *Inmatningsruta för derivering. Notera att vi har ändrat derivationsvariabeln till t. För att beräkna andraderivatan ändrar vi till 2 på raden gånger.*

Exempel 8.3. Maxima kan beräkna gränsvärde antingen då x går mot oändligheten eller då x får mot en punkt. För att beräkna gränsvärdet av $f(x) = \sin(x)/x$ då x går mot 0 väljer vi *Finn gränsvärde* och får upp ett fönster som det i figur 7. Vi skriver in funktionen $\sin(x)/x$ och punkten mot vilken x närmar sig och trycker på *OK*. Maxima beräknar gränsvärdet som i detta fall är 1. □

Figur 7: *Inmatningsruta för gränsvärde. Man kan bestämma gränsvärde då x går mot en punkt eller då x går mot oändligheten.*

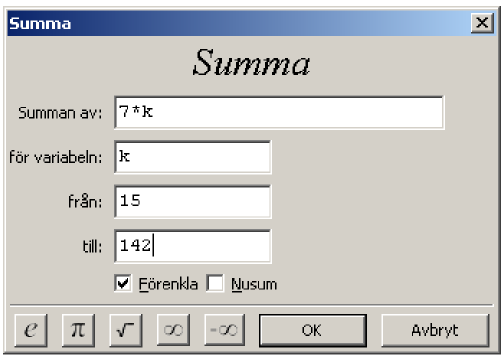
Exempel 8.4.

(a) Låt oss anta att vi vill summera alla tresiffriga tal som är delbara med talet sju (7). Det innebär att ett sådant tal går att skriva som $7k$ och att vi startar med det första tresiffriga talet som är delbart med 7, det vill säga 105. Då måste startvärdet för k vara 15. Det högsta tresiffriga talet som är delbart med sju är 994, vilket motsvarar ett värde på $k = 142$. För att beräkna summan klickar vi på *Finn gränsvärde* och får upp ett fönster som det i figur 8. Vi skriver in summationsuttrycket $7k$ och gränserna och trycker på *OK*. Maxima returnerar svaret 70336.

(b) Vi ska beräkna den oändliga summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Vi skriver in $1/k^2$ samt gränserna 1 och ∞ (`inf`) och klickar på *OK*. Maxima returnerar svaret $\pi^2/6$. Testa gärna några fler summor. $\square$.



Figur 8: *Inmatningsruta för summation. Skriv in summationsuttryck och gränser*

Exempel 8.5. Man kan dividera polynom på samma sätt som man dividerar heltal. För att utföra divisionen

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

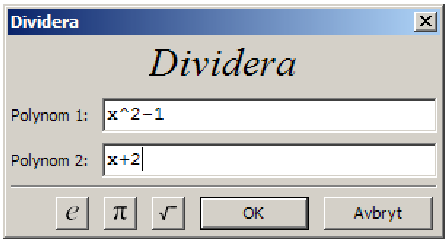
klickar vi på *Polynomdivision* och inmatningsrutan i figur 9 kommer upp. Vi skriver in polynomen och klickar på *OK*. Vi får svaret

$$[x - 2, 3]$$

Det första elementet $x-2$ är kvoten och det andra elementet 3 är resten. Vi har alltså

$$\frac{x^2-1}{x+2} = x-2+\frac{3}{x+2}$$

Kontrollera gärna svaret genom att sätta högerledet på gemensam nämnare. □



Figur 9: *Polynom kan divideras på samma sätt som heltal.*

Exempel 8.6. Rationella funktioner där nämnaren är en faktor kan skrivas som ett partialbråk. Funktionen

$$\frac{-x}{(x+1)^2(x+2)}$$

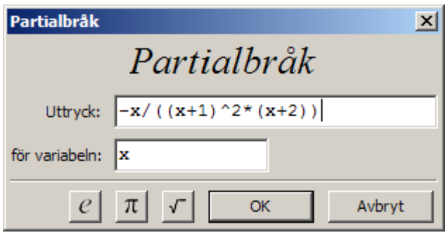
partialbråksuppdelas genom att klicka på *Partialbråksuppdelning*. Rutan i figur 10 kommer upp och vi matar in

```
-x/((x+1)^2*(x+2))
```

och trycker på *OK*. Resultatet blir

$$\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

Kontrollera även i detta fallet gärna svaret genom att sätta högerledet på gemensam nämnare. □

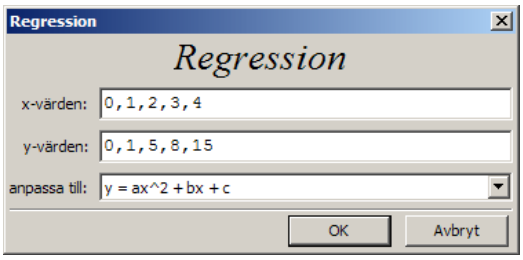


Figur 10: *Rationella funktioner kan uppdelas i partialbråk.*

Exempel 8.7. Vi har ett antal datapunkter

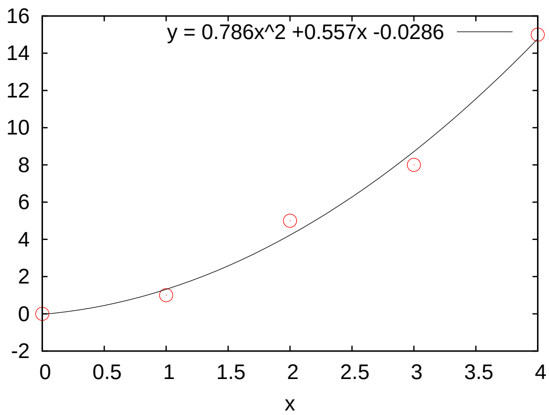
x	0	1	2	3	4
y	0	1	5	8	15

För att anpassa ett andragradspolynom till data (regression) går vi in i menyn *Infinitesimalkalkyl* och klicka på optionen *Regression*. Rutan i figur 11 kommer fram. Vi matar in våra x- och y-värden. Sedan klickar vi på pilen till höger på raden *anpassa till:* och väljer ett andragradspolynom (där finns också en mängd andra funktioner att välja mellan).



Figur 11: *Anpassning av funktion till data (regression).*

Då vi klickar på *OK* bestämmer Maxima det andragradspolynom som bäst ansluter till våra datavärden. Detta polynom plottas tillsammans med data och vi får fram figur 12. □



Figur 12: *Anpassat andragradspolynom tillsammans med datapunkter.*

9 Ekvationer och nollställen

Att bestämma nollställen och lösa ekvationer är viktiga moment i gymnasiets matematikundervisning. Under rullgardinsmenyn *Ekvationer* finns flera optioner för detta.

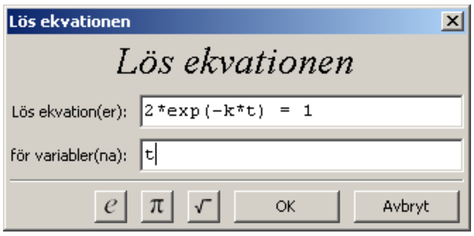
Lös ekvation	lös ekvation.
Lös linjärt system	lös system av ekvationer.
Nollpunkter	bestäm nollställen till en funktion.

Under rullgardinsmenyn *Ekvationer* finns även kommandon för att lösa differentialekvationer. Vi kommer till detta i ett separat avsnitt längre fram.

Exempel 9.1. För att lösa ekvationen $2e^{-kt} = 1$ med avseende på t klickar vi på optionen *Lös ekvation*. Fönstret i figur 13 kommer upp. Vi skriver in ekvationen och den variabel med avseende på vilken vi ska lösa ekvationen och klickar på *OK*. Maxima returnerar svaret

$$\left[t = \frac{\log 2}{k}\right]$$

□



Figur 13: *Skriv in ekvation och lösningsvariabel.*

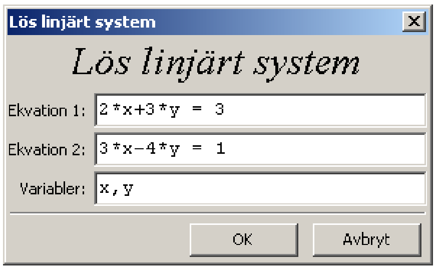
Exempel 9.2. För att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

med avseende på x och y klickar vi på optionen *Lös linjärt system*. Vi får upp ett fönster där man skall ange antalet ekvationer. Vi skriver in att det är två ekvationer och klickar på *OK*. Fönstret i figur 14 kommer upp och vi skriver in ekvationerna och lösningsvariablerna x och y och klickar på *OK*. Maxima svarar

$$[[x = \frac{15}{17}, y = \frac{7}{17}]]$$

I exemplet har vi lika många ekvationer som obekanta. Maxima klarar även att lösa underbestämda system, där vi har fler variabler än ekvationer. □

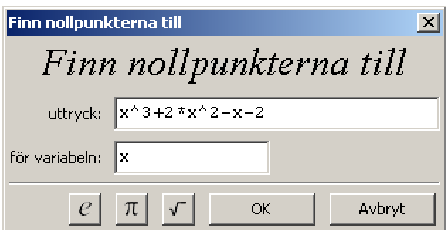


Figur 14: *Mata in ekvationerna och lösningsvariablerna.*

Exempel 9.3. Vi har funktionen $f(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$. För att bestämma nollställena (nollpunkterna) till funktionen klickar vi på *Nollpunkter*. Ett fönster liknande det i figur 15 kommer upp. Vi matar in funktionsuttrycket och variabeln, x och trycker på *OK*. Maxima ger svaret

$$[x = -2, x = -1, x = 1]$$

□



Figur 15: *Mata in funktionsuttrycket och variabeln.*

10 Ordinära differentialekvationer

Ordinära differentialekvationer är viktiga i gymnasiets E-kurs. Under rullgardinsmenyn *Ekvationer* finns optionen *Lös ODE* med vars hjälp man kan lösa både första- och andra ordningens ordinära differentialekvationer. Under rullgardinsmenyn *Grafer* finns optionen *Riktningsfält* som plottar ett riktningsfält till en första ordninges ekvation.

Lös ODE	lös ordinär differentialekvation.
Riktningsfält	rita riktningsfält.

Analytiska lösningar

Exempel 10.1. För att bestämma den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' + y = te^{-t}$$

går vi in i rullgardinsmenyn *Ekvationer* och klickar på *Lös ODE*. Fönstret i figur 16 kommer fram. Vi matar in ekvationen och noterar att derivatan y' skrivs som `'diff(y,t)`. Vi skriver in att den beroende variabeln är y medan den oberoende är t. Då detta är klart klickar vi på *OK* och Maxima svarar

$$y = \left(\frac{t^2}{2} + \%c\right) e^{-t}$$

Här är $\%c$ en godtycklig konstant.

För att bestämma den lösning som uppfyller $y(2) = 5$ skriver vi in ekvationen på samma sätt som tidigare, bockar för rutan *Startvärde* och skriver in $t = 2$ och $y = 5$. Då vi klickar på *OK* får vi svaret

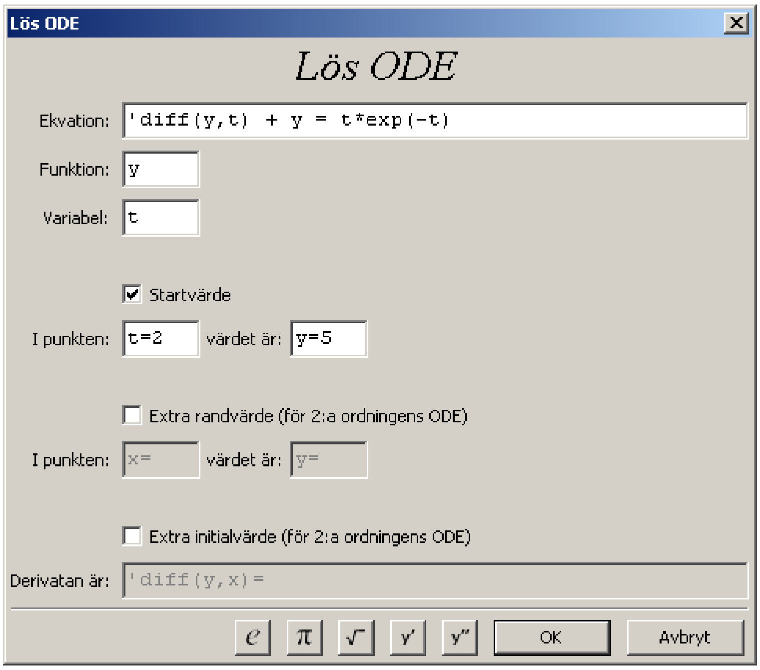
$$y = \frac{\left(t^2 + 10\, e^2 - 4\right)\, e^{-t}}{2}$$

Exempel 10.2. Vi går vidare och tittar på andra ordningens differentialekvationer. För att få en entydig lösning behöver man nu lägga på två villkor. För att bestämma lösningen till differentialekvationen

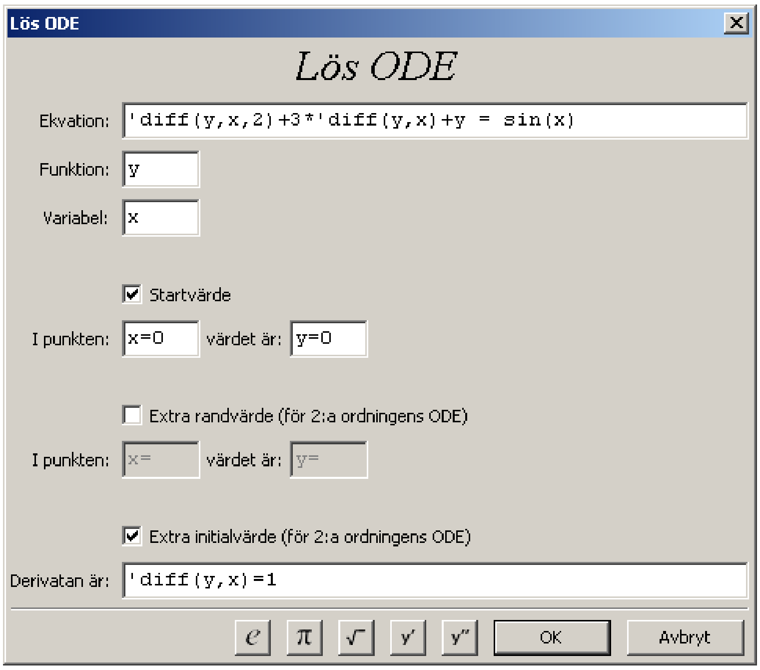
$$y'' + 3y' + y = \sin x$$

som uppfyller vilkoret $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ går vi in i rullgardinsmenyn *Ekvationer* och klickar på *Lös ODE*. Fönstret i figur 17 kommer fram och vi matar in ekvationen (notera att y'' skrivs som `'diff(y,x,2)`). Vi markerar rutan *Startvärde* och skriver in $x = 0$ och $y = 0$. Efter det markerar vi rutan *Extra initialvärde* och matar in att förstaderivatan är 1. Alla inmatningar är nu klara och vi klickar på *OK*. Maxima skriver ut lösningen

$$y = -\frac{\cos(x)}{3} + \frac{\left(9\sqrt{5} + 5\right) e^{\frac{\left(\sqrt{5}-3\right) x}{2}}}{30} - \frac{\left(9\sqrt{5} - 5\right) e^{\frac{\left(-\sqrt{5}-3\right) x}{2}}}{30} \qquad \square$$



Figur 16: *Mata in ekvationen och den beroende och oberoende variabeln. I de fall vi ska lösa ett begynnelsevärdesproblem klickar vi även i rutan* Startvärde *och fyller i dessa.*



Figur 17: *Mata in ekvation, variabler och startvärden.*

Riktningsfält

Differentialekvationer av första ordningen

$$y' = f(x, y)$$

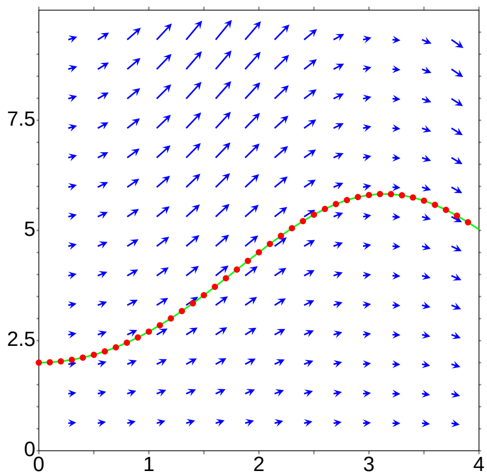
har en enkel geometrisk tolkning. Derivatan y' ger riktningskoefficienten för lösningen genom punkten (x, y). Via likheten $y' = f(x, y)$ associerar därmed funktionen $f(x, y)$ en riktning till varje punkt i xy-planet. Då man markerar riktningen med en liten pil får man det så kallade riktningsfältet. Genom att följa pilarna i riktningsfältet är det ofta möjligt att få en kvalitativ uppfattning om lösningarna till differentialekvationen.

Exempel 10.3. Vi har en differentialekvation

$$y' = \sin(x)\sqrt{y}.$$

För att rita riktningsfältet i området $[0, 4] \times [0, 10]$ går vi in i rullgardinsmenyn *Grafer* och väljer *Riktningsfält*. Fönstret i figur 18 kommer fram. Vi skriver in högerledet $\sin(x)\sqrt{y}$ samt gränserna i x och y. Notera att endast variablerna x och y tillåtna då man ritar riktningsfält. Då vi klickar på *OK* ritas riktningsfältet upp. Då vi klickar på en punkt i riktningsfältet ritas lösningskurvan genom denna punkt (se figur 19).

Figur 18: *Mata in högerled och begränsningar i x- och y-led..*



Figur 19: *Riktningsfält till ekvationen* $y' = \sin(x)\sqrt{y}$. *I figuren har vi även ritat in den numeriska lösningen genom punkten* $(0, 2)$.

11 Vektorgeometri

Optionerna under rullgardinsmenyn *Algebra* är relaterade till vektorgeometri.

Längden av en vektor	ger längden av en vektor.
Vinkel mellan vektorer	ger vinkeln i grader mellan två vektorer.
Plan genom tre punkter	bestämmer ekvationen för ett plan genom tre punkter.
Skalärprodukt	beräknar skalärprodukten av två vektorer.
Kryssprodukt	beräknar kryssprodukten mellan två vektorer.

Exempel 11.1. För att beräkna längden av vektorn $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ klickar vi på *Längden av en vektor* så att fönstret i figur 20 kommer fram. Vi matar in vektorn (obs inga parenteser runt) och trycker på *OK*. Vi får att vektorns längd är $\sqrt{6}$. Notera att man även kan beräkna längden av tvådimensionella vektorer. □

Figur 20: *Längd av vektor. Elementen i vektorn matas in utan parentes.*

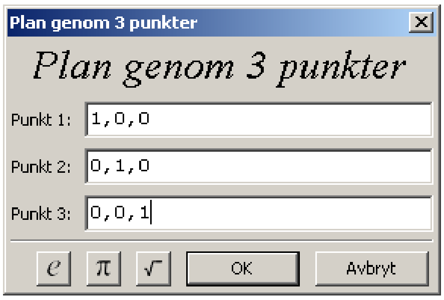
Exempel 11.2. Vi ska beräkna vinkeln i grader mellan vektorerna $\mathbf{v} = (0, 1)$ och $\mathbf{u} = (1, 1)$ och klickar på *Vinkel mellan vektorer* så att fönstret i figur 21 kommer fram. Vi matar in vektorerna (obs inga parenteser runt) och trycker på *OK*. Vi får att vinkeln är 45.0 grader. Vi kan även beräkna vinkeln mellan två tredimensionella vektorer. □

Figur 21: *Vinkel mellan två vektorer. Elementen matas in utan parenteser.*

Exempel 11.3. För att bestämma ekvationen för planet genom de tre punkterna $(1,0,0)$, $0,1,0)$ och $(0,0,1)$ klickar vi på *Plan genom tre punkter*. Fönstret i figur 22 kommer fram och vi matar in punkterna och trycker på *OK*. Maxima skriver ut planets ekvation

$$z = -y - x + 1$$

Man verifierar enkelt att alla tre punkterna ligger i planet. □



Figur 22: *Ekvationen för ett plan genom tre punkter.*

Exempel 11.4. Vi har två vektorer $\mathbf{u} = (1,1,1)$ och $\mathbf{v} = (2,1,1)$. För att bestämma skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ klickar vi på *Skalärprodukt*. Fönstret i figur 23 kommer fram och vi matar in de två vektorerna och trycker på *OK*. Vi får att skalärprodukten är 4. Skalärprodukt kan beräknas får både två- och tredimensionella vektorer. □

Figur 23: *Beräkning av skalärprodukt mellan två vektorer.*

Exempel 11.5. Kryssprodukten av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ två tredimensionella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är en ny vektor som är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Längden av den nya vektorn är lika med arean av parallellogramen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vi har två vektorer $\mathbf{u} = (1,1,0)$ och $\mathbf{v} = (2,1,3)$. För att bestämma kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ klickar vi på *Kryssprodukt*. Fönstret i figur 24 kommer fram och vi matar in de två vektorerna och trycker på *OK*. Maxima skriver ut

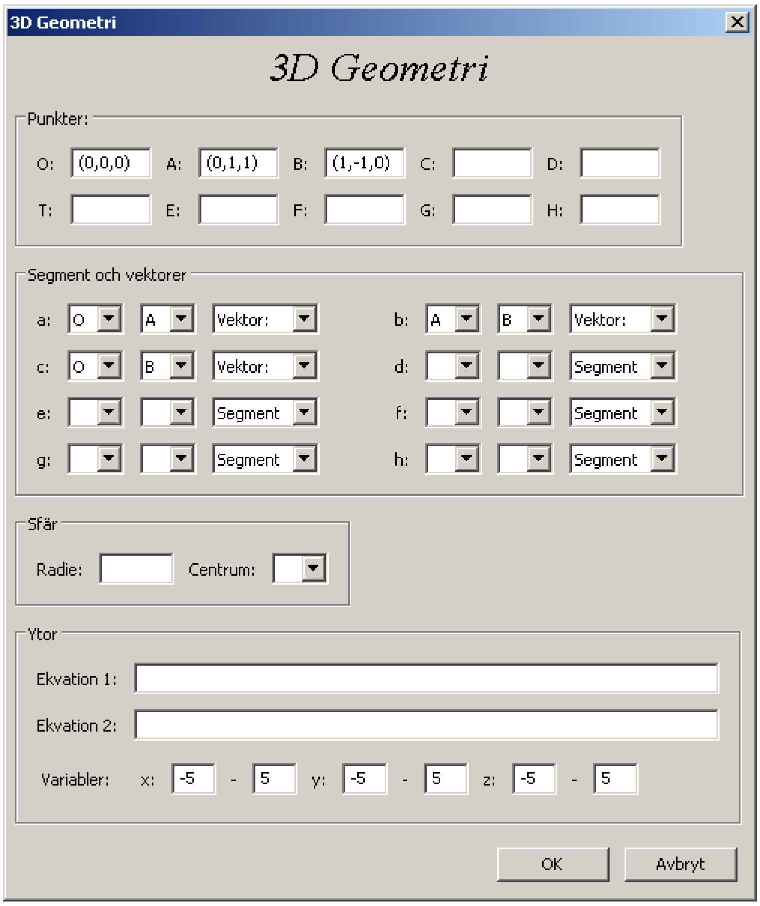
$$[3, -3, -1]$$

□

Figur 24: *Kryssprodukt mellan två vektorer.*

12 Vektorer, linjer och plan i 3-dimensioner

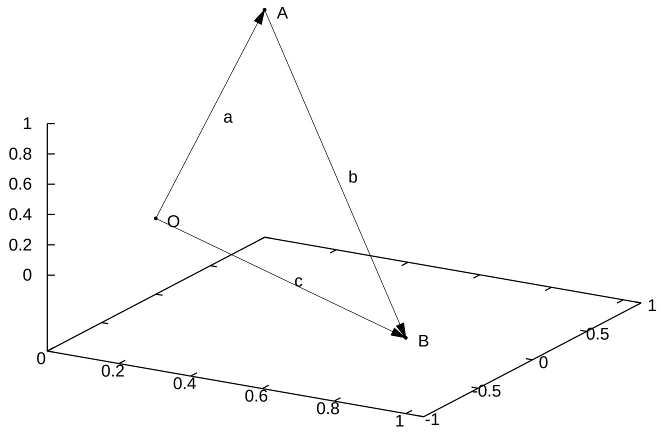
Man kan rita vektorer, linjer, plan och ytor i 3-dimensioner. För att göra detta klickar man på rullgardinsmenyn *Grafer* och väljer *3D Geometri*. En inmatningsruta som den i figur 25 kommer då upp. I den första delen av inmatningsrutan kan vi definiera ett antal punkter. I den andra delen av inmatningsrutan för vi möjlighet att rita segment eller vektorer mellan kombinationer av punkter. Ytterligare lite längre ned får vi möjlighet att rita en sfär eller olika ytor.



Figur 25: *Inmatningsfönstret till 3D Geometri. Vi kan definiera ett antal punkter och rita vektoremellan dessa. Vi kan även plotta en eller flera ytor.*

Exempel 12.1. Vi har tre punkter $O : (0, 0, 0)$, $A : (0, 1, 1)$, $B : (1, -1, 0)$ och ska rita vektorerna $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}$. Vi börjar med att mata in punkterna O, A, B

i inmatningsrutan som hör till optionen *3D Geometri*. Därefter markerar vi att vi vill rita en vektor mellan O och A, en mellan A och B och slutligen en mellan O och B. Gränserna för x, y och z låter vi vara mellan -5 och 5 (defaultvärden). Alla inmatningar är nu klara och då vi trycker på *OK* får vi upp figur 26. □



Figur 26: *Illustration av vektoraddition.*

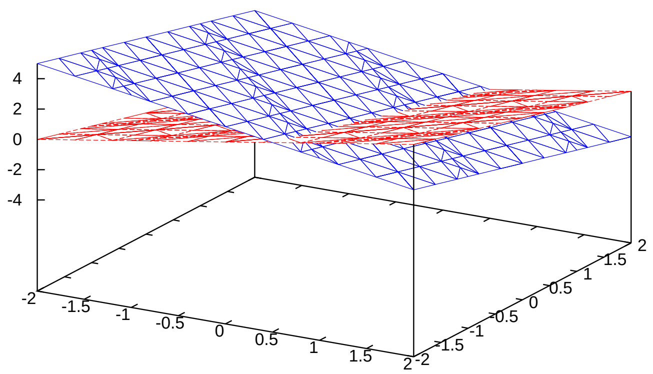
Exempel 12.2. För att rita planen $x + y + z = 1$ och $x - y - z = 0$ i samma figur klickar vi på optionen *3D Geometri* så att vi får upp inmatningsrutan. Vi skriver nu in

```
x + y + z = 1
```

och

```
x - y - z = 0
```

på raden för *Ekvation 1* respektive *Ekvation 2*, och låter variablerna x och y löpa mellan -2 och 2. När inmatningarna är klara trycker vi på *OK* varvid figur 27 kommer upp. □



Figur 27: *Två skärande plan.*

13 Sannolikhetslära

I det här avsnittet skall vi titta på optionerna under rullgardinsmenyn *Sannolikhetslära*. Dessa optioner är:

Binomialkoefficient	Att beräkna binomialkoefficienter.
Hypergeometrisk fördelning	En diskret sannolikhetsfördelning.
Binomialfördelning	En diskret sannolikhetsfördelning.

Exempel 13.1. Verktyget binomialkoefficient räknar helt enkelt ut binomialkoefficienten för ett viss förlopp. Antag att vi vill undersöka på hur många sätt som vi kan välja ut ett fem spelare till ett lag utifrån elva tillgängliga spelare. Vi klickar på *Sannolikhetslära* och väljer *Binomialkoefficient ... n över k* samt skriver in våra värden enligt figur 28. Då vi klickar på *OK* returnerar Maxima svaret 462. □

Figur 28: *Beräkning av Binomialkoefficienter i Maxima.*

Exempel 13.2. Vi gör en gallupundersökning bland gymnasister i en storstad. Vi vet att cirka 20 % av dessa skolelever är rökare och frågar ett slumpvist utvalt antal om 500 elever om de röker. Hur stor är sannolikheten att precis 100 elever svarar Ja? Detta går att testa med en binomial fördelning. Välj *Binomial fördelning* och figur 30 kommer upp. Mata in antal dragningar, sannolikhet för träff samt antal träffar. Tryck på *OK* och vi får att sannolikheten att precis 100 elever svarar Ja på frågan till 0.0446, dvs ganska låg sannolikhet. □

Figur 29: *Hur stor är sannolikheten att precis 100 svarar Ja?*

Exempel 13.3. Den så kallade hypergeometriska fördelningen är det tredje verktyget under *Sannolikhetslära*. Det är en diskret sannolikhetsfördelning, som beskriver dragning utan återläggningmed två sorters objekt. Vi har en urna med 30 röda och 20 blå kulor. Vi drar slumpmässigt 8 kulor utan att titta på dem. För att bestämma sannolikheten att det är 5 röda och 3 blå kulor med bland de 8 klickar vi på *Hypergeometrisk fördelning* så att ett fönster som det i figur 30 kommer upp. Vi matar in antalet röda kulor (typ 1) och blå kulor (typ 2) samt antalet kulor som skall dras.

Antalet dragningar av röda kulor (typ 1) är 5. Alla inmatningar är nu klara och då vi trycker på *OK* ger Maxima sannolikheten som är 0.30259. □

Figur 30: *Hur stor är sannolikheten att det är 5 röda och 3 blå kulor med bland de 8 som dras?*

14 Referenser

Här kommer några referenser för den som vill läsa vidare om datoralgebrasystem

Josef Böhm, m.fl, The Case for CAS, T^3 Europe (2004), ISBN 3-934064-45-0

Laddas ner från `www.t3ww.com/pdf/TheCaseforCAS.pdf` [hämtat 20070201]

Boken argumenterar för fördelarna med ett symbolhanterande arbetssätt i skolan och ger exempel på uppgifter och prov från lärare i olika länder.

Per Jönsson, Matematik med datoralgebrasystem, Studentlitteratur (2008), ISBN 978-91-44-05250-2

Boken går systematiskt igenom Maximas olika kommandon och tillämpar dessa inom algebra och analys. Boken innehåller ett stort antal övningar med fullständig lösning och lämpar sig väl för självstudier.

Göran Andersson, Tillämpad matematik med Maple, Studentlitteratur (1997), ISBN 91-44-00503-2

Boken ger grunderna i symbolisk matematik med Maple, som är ett kommersiellt program liknande Maxima.

Jan Liliemark, Algebra och analys med Mathematica, Studentlitteratur (2002), ISBN 91-44-02224-7

Boken behandlar matematisk analys och linjär algebra med det symbolhanterande programmet Mathematica. Boken innehåller 100 exempel på symboliska beräkningar med lösningar och 200 övningsuppgifter. Bra om man vill få lite tips på matematikuppgifter som lämpar sig för symbolhanterande program.