



Lær å bruke wxMaxima

Et godt og gratis CAS-verktøy
med enkelt brukergrensesnitt.

Oppdatert versjon, november 2009

Innhold:

| | |
|---|----|
| Hva er wxMaxima? | 3 |
| Hvor kan vi få lastet ned norsk versjon av wxMaxima? | 4 |
| Verktøylinjene | 4 |
| Nedre menylinje | 5 |
| Eksempel 1. Forenkling av uttrykk (<i>Regn ut</i>) | 5 |
| Eksempel 2. Ulikheter | 5 |
| Eksempel 3. Ulikheter av høyere grad | 6 |
| Eksempel 4. Nullpunkter | 6 |
| Eksempel 5. Faktorisering | 7 |
| Eksempel 6. Utvid uttrykk | 7 |
| Eksempel 7. Derivasjon | 8 |
| Eksempel 8. Mer derivasjon | 9 |
| Eksempel 9. Ubestemt integral | 9 |
| Øvre menylinje | 10 |
| Likninger | 10 |
| Eksempel 10. Løs likning | 10 |
| Eksempel 11. Løs likningssett | 11 |
| Eksempel 12. Lineær optimering | 12 |
| Eksempel 13. Nullpunkter | 13 |
| Eksempel 14. Første ordens differensiallikning | 13 |
| Eksempel 15. Første ordens differensiallikning med initialverdier | 15 |
| Eksempel 16. Andre ordens differensiallikning | 15 |
| Eksempel 17. Andre ordens differensiallikning med initialverdier | 16 |
| Algebra | 17 |
| Eksempel 18. Lengden til en vektor | 18 |
| Eksempel 19. Vinkelen mellom to vektorer (i grader) | 18 |
| Eksempel 20. Plan gjennom 3 punkter | 19 |
| Eksempel 21. Skalarprodukt | 19 |
| Eksempel 22. Vektorproduktet | 20 |
| Eksempel 23. Matriser og determinanter | 21 |
| Funksjonsanalyse | 22 |
| Eksempel 24. Bestemt integral. Eksakt og numerisk løsning | 22 |
| Eksempel 25. Derivasjon | 23 |
| Eksempel 26. Finn grenseverdien | 24 |
| Eksempel 27. Sum av endelige rekker | 24 |
| Eksempel 28. Sum av uendelige rekker | 25 |
| Eksempel 29. Å finne formler for sum av rekker | 26 |
| Eksempel 30. Polynomdivisjon | 26 |
| Eksempel 31. Delbrøkoppspaltning | 27 |
| Eksempel 32. Lineær regresjon | 27 |
| Eksempel 33. Logistisk regresjon | 29 |
| Sannsynlighet | 30 |
| Eksempel 34. Binomialkoeffisient | 31 |
| Eksempel 35. Hypergeometrisk fordeling | 31 |
| Eksempel 36. Binomisk fordeling | 32 |
| Eksempel 37. Normalfordeling | 34 |
| Eksempel 38. Normalfordeling og invers normalfordeling | 35 |
| Grafer | 36 |
| Eksempel 39. Grafer i planet | 36 |
| Eksempel 40. Parametrisk graf i 2D | 38 |
| Eksempel 41. Grafer i rommet | 39 |
| Eksempel 42. Romgeometri | 40 |
| Eksempel 43. Retningsdiagram | 42 |

Hva er wxMaxima?

wxMaxima er et avansert symbolbehandlerende verktøy som regner eksakt. Det vil si at det ikke bare kan regne med tall, men også med symboler som

$$\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, e^2 \text{ osv.}$$

Når du starter opp wxMaxima, får du opp et vindu som ser slik ut:



I inntastingsfeltet helt nederst, kan du skrive inn kommandoer omtrent som på en lommeregner. Resultatet blir vist i det store hvite feltet. Knappene nederst virker på det siste du skrev inn. Det betyr at du for eksempel kan skrive inn et uttrykk, og deretter trykke på *Faktoriser* for å faktorisere uttrykket, eller *Deriver* for å derivere det. I tillegg finnes det en menyrad i toppen av programvinduet. Her kan du gjøre mer avanserte operasjoner.

Vi synes at et matematikkprogram skal være lett å ta i bruk for lærere og elever. Det må være intuitivt, slik at en slipper å lese tykke manualer for å kunne starte opp. Lektor Bjørn Ove Thue ved Møglestu videregående skole har oversatt programmet til norsk og tilpasset menyer og verktøylinjer til de norske læreplanene for vgs. *wxMaxima* er etter vår mening svært lett å ta i bruk. En

skjønner som regel uten videre hva en må gjøre for å få utført de ulike operasjonene. Denne manualen er derfor ment som et oppslagshefte med tips til de ulike mulighetene som programmet byr på.

Det er selvsagt ikke meningen at bruken av slike program skal erstatte evnen til å løse matematiske problemer med papir og blyant. Det er veldig viktig at elever øver så mye på oppgaveløsning uten hjelpemidler at de får automatisert basiskunnskapene. På den andre siden kan digitale hjelpemidler frigi tid på prøver og eksamener på del 2, der det er andre matematiske ferdigheter som blir testet. Det kan også være et nyttig redskap i mer utforskende og problembaserte oppgaver.

Hvor kan vi få lastet ned norsk versjon av wxMaxima?

Gå til nettsiden www.moglestu.vgs.no/maxima. Der finner du eksempler på hvilke læreplanmål i 1P, 1T, 2P, S1, R1, S2 og R2 wxMaxima passer til. Der finner du også opplæringsanimasjoner med eksempler på de ulike bruksområdene for wxMaxima. Slik ser øverste del av åpningsvinduet for www.moglestu.vgs.no/maxima ut:

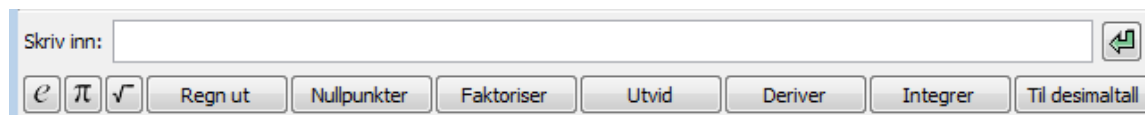


wxMaxima i korte trekk

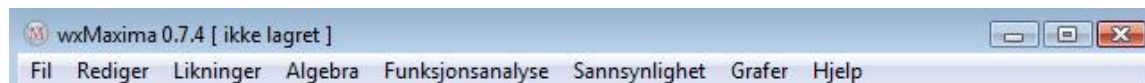
- wxMaxima er gratis for alle, og gitt ut under GNU GPL2-lisensen.
- wxMaxima løser likninger og likningssystemer, forenkler symbolske uttrykk, integrerer, deriverer og mye mer.
- Last ned og installer wxMaxima her. (Programmet støtter bokmål, nynorsk, svensk og engelsk)
- Velg bruksanvisning for faget 1T, R1 eller R2. Det finnes også mer generelle bruksanvisninger på norsk og svensk
- Har du problemer, ønsker tips eller annet? [Klikk her](#).

Verktøylinjene

Vi starter med inntastingsfeltet og verktøyene som ligger nederst i programvinduet:



Deretter tar vi for oss de ulike menyvalgene i verktøylinja som ligger øverst i programvinduet:



Nedre menylinje

Eksempel 1. Forenkling av uttrykk (*Regn ut*)

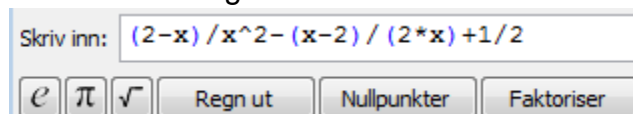
Oppgave 2.72 d, side 50 i Sinus 1T (Ny bok fra 2009)

Trekk sammen.

$$\frac{2-x}{x^2} - \frac{x-2}{2x} + \frac{1}{2}$$

Løsning:

Skriv i inntastingsfeltet:



Skriv inn: $(2-x)/x^2 - (x-2)/(2*x) + 1/2$

Klikk *Regn ut*. OBS: Det er viktig å ta med gangetegnet i *wxMaxima*.

Resultatet blir:

(%i1) `wx_compute((2-x)/x^2-(x-2)/(2*x)+1/2);`

(%o1) $\frac{2}{x^2}$

Heretter viser vi som regel ikke det røde nummeret på *input* og *output* foran uttrykkene.

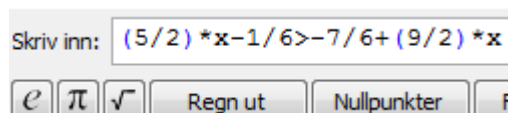
Eksempel 2. Ulikheter

Oppgave 3.81 e, side 84 i Sinus 1T

$$\frac{5}{2}x - \frac{1}{6} > -\frac{7}{6} + \frac{9}{2}x$$

Løsning:

Skriv inn ulikheten og klikk *Regn ut*.



Skriv inn: $(5/2)*x-1/6 > -7/6+(9/2)*x$

`wx_compute((5/2)*x-1/6>-7/6+(9/2)*x);`

$$x < \frac{1}{2}$$

Eksempel 3. Ulikheter av høyere grad

Oppgave 4.281 f, side 323 i Sinus 1T

Løs ulikhet $-5x^2 + 4x - 1 < x^2 - 3x - 4$.

Løsning:

Skriv inn ulikheten og klikk *Regn ut*.

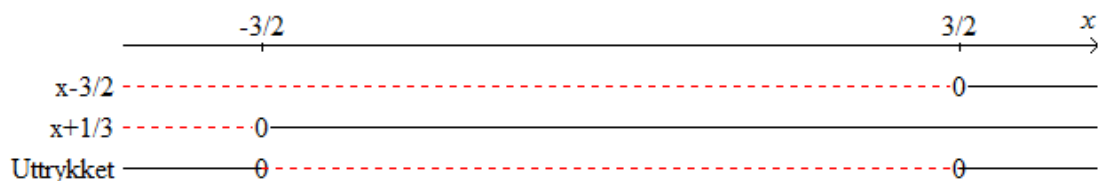
Skriv inn:

`wx_compute(-5*x^2+4*x-1<x^2-3*x-4);`

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0$$

Her gir ikke *wxMaxima* svaret direkte, men faktoriserer og gjør ulikheten klar til drøfting på tallinje. Dersom du vil føre denne drøftingen digitalt, er det veldig greit å bruke programmet *Fortegnslinjer*, som kan lastes ned fra nettsidene til Sinus.

Slik ser en løsning av ulikheten i oppgav 4.281 f) ut, når vi bruker programmet *Fortegnslinjer*.



Eksempel 4. Nullpunkter

Oppgave 4.24 b, side 97 i Sinus 1T

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^4 - 4x^2$.

Finn nullpunktene til f .

Løsning:

Skriv i inntastingsfeltet:

Skriv inn:

Husk gangetegnet. Trykk *Nullpunkter*. Resultatet blir:

```
solve(x^4-4*x^2);  
[x = -2, x = 2, x = 0]
```

Eksempel 5. Faktorisering

Oppgave 2.64 d, side 48 i Sinus 1T

Faktoriser uttrykkene hvis det lar seg gjøre.

d) $12x^3 - 75x$

Løsning:

Skriv inn uttrykket slik det er vist nedenfor og klikk deretter *Faktoriser*.

Skriv inn:

```
wx_factor(12*x^3-75*x );  

$$12\left(x - \frac{5}{2}\right)x\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

```

Du kan også faktorisere store tall som for eksempel 12345678987654321 til primtallsfaktorer ved å bruke den samme *Faktoriser*-knappen nederst i programvinduet. Prøv det.

Eksempel 6. Utvid uttrykk

Å utvide et uttrykk er det motsatte av å faktorisere.

Dersom vi merker resultatet fra eksempel 5 og klikker *Utvid*, får vi det vi startet med:

```
wx_factor(12*x^3-75*x);
```

$$12\left(x - \frac{5}{2}\right)x\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

```
wx_expand(12*(x-5/2)*x*(x+5/2));
```

$$12x^3 - 75x$$

Eksempel 7. Derivasjon

Oppgave 8.41 c og d, side 219 i Sinus 1T

Deriver uttrykkene.

c) $5x^3 + 7x - 1$ d) $-3t^3 + 3t^2 + t - 1$

Løsning:

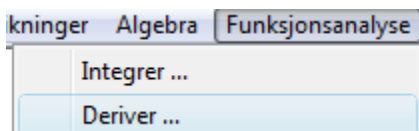
c) Skriv inn uttrykket nedenfor og klikk på *Deriver*.

Skriv inn:

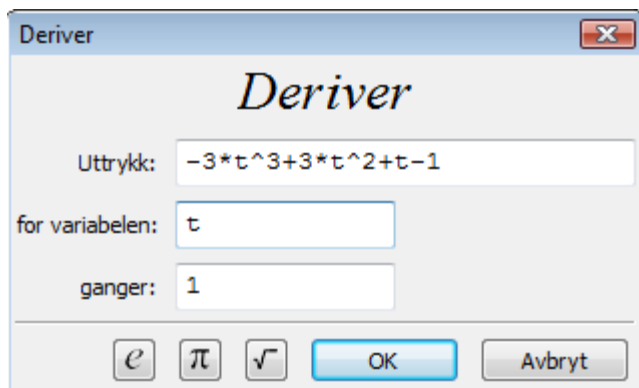
```
diff(5*x^3+7*x-1 ,x);
```

$$15x^2 + 7$$

d) Her er det ikke x , men t som er variabel. Da kan vi ikke bruke hurtigtasten nederst, men må bruke menyvalget *Funksjonsanalyse* og *Deriver*.



Skriv så inn uttrykket, bruk t som variabel og klikk OK.



`diff(-3*t^3+3*t^2+t-1, t);`
 $-9t^2 + 6t + 1$

Eksempel 8. Mer derivasjon

Oppgave 8.23 b, side 270 i Sinus R1

Deriver funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2+3} + \sqrt{2x+1}$.

Løsning:

Skriv inn uttrykket slik det er vist nedenfor og trykk *Deriver*.

Skriv inn:

`diff(1/(x^2+3)+sqrt(2*x+1), x);`

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

Eksempel 9. Ubestemt integral

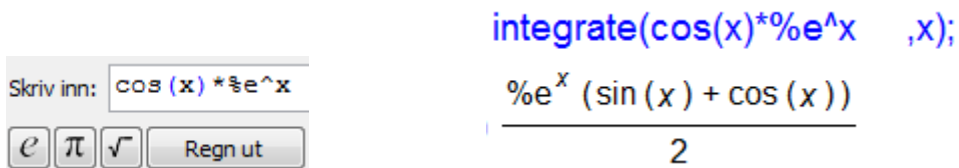
Oppgave 7.34, side 289 i Sinus R2

Finn integralet $\int \cos x \cdot e^x dx$.

Løsning:

Skriv inn uttrykket nedenfor og trykk *Integrer*. Legg merke til at vi må skrive et prosenttegn (%) før e. Det må vi gjøre for alle konstanter. Det raskeste er å klikke

på ikonet for konstanten e nederst til venstre i programvinduet.

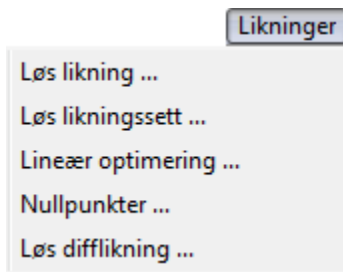


Vi ser at konstanten C mangler i svaret fra *wxMaxima*.

Øvre menylinje

Likninger

Vi vil her vise eksempler på de ulike menyvalgene i *Likninger*.



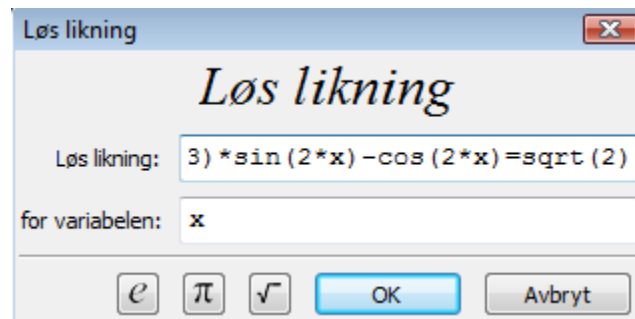
Eksempel 10. Løs likning

Oppgave 1.91 b, side 131 i Sinus R2

Løs likningen $\sqrt{3} \cdot \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$, $x \in [0, \pi]$

Den enkleste måten å løse likninger på, er å skrive dem inn i inntastingsfeltet og trykke på *Regn ut*. Fordelen med måten nedenfor er at du kan velge hvilken variabel du vil løse likningen med hensyn til, dersom det er mer enn en variabel.

Klikk på *Likninger* og *Løs likning*. Skriv inn likningen og klikk OK.



```
wx_compute_wrt(sqrt(3)*sin(2*x)-cos(2*x)=sqrt(2), x);
```

$$\left[x = \%pi n + \frac{5 \%pi}{24}, x = \%pi n + \frac{11 \%pi}{24} \right]$$

For den aktuelle definisjonsmengden er $n = 0$. Da får vi at $x = \frac{5\pi}{24}$ eller $x = \frac{11\pi}{24}$

Eksempel 11. Løs likningssett

Oppgave 3.72 c, side 83 i Sinus 1T

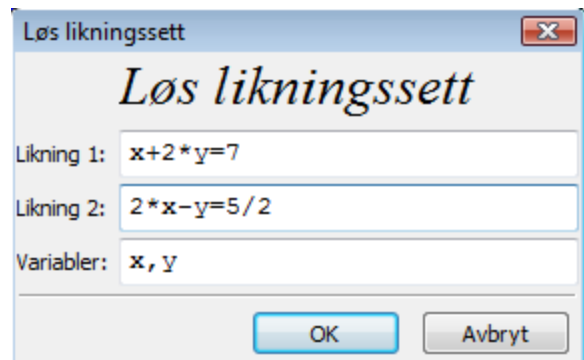
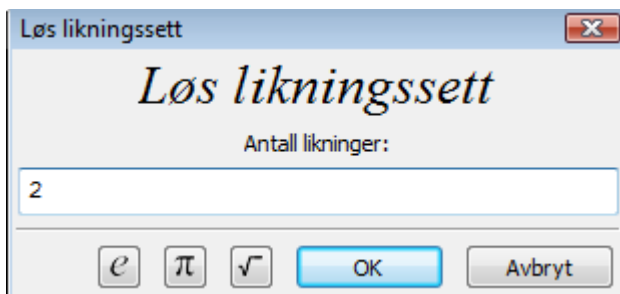
Løs likningssettet:

$$x + 2y = 7$$

$$2x - y = \frac{5}{2}$$

Løsning:

Klikk på *Likninger* og på *Løs likningssett*. La antall likninger være 2. Klikk OK
Skriv inn de to likningene og klikk OK.



```
solve([x+2*y=7, 2*x-y=5/2 ], [x,y]);
```

$$\left[\left[x = \frac{12}{5}, y = \frac{23}{10} \right] \right]$$

I S2-kurset har vi bruk for å løse fire likninger med fire ukjente. Dette klarer *wxMaxima* lett.

Eksempel 12. Lineær optimering

Eksempel a, side 79 i Sinus S1

I heftet *Lineær optimering med GeoGebra*, som kan lastes ned fra Sinus-sidene, er det vist hvordan dette eksempelet kan løses ved hjelp av det programmet. Den løsningen er mer visuell enn det direkte svaret vi får med *wxMaxima*.

Baker Bollerud har 180 kg mel, 50 kg sukker og 35 kg smør igjen på lager. Han produserer boller og lefser som han leverer i hele kartonger. Til en kartong boller bruker han 3 kg mel, 1,5 kg sukker og 1 kg smør. Til en kartong lefser bruker han 6 kg mel, 1 kg sukker og 1 kg smør. Han produserer x kartonger boller og y kartonger lefser ev det råstoffet han har på lager.

Finn den største inntekten han kan oppnå hvis han tjener 150 kroner per kartong med boller og 210 kroner per kartong med lefser.

$$\begin{array}{ll} \text{Mel:} & 3x + 6y \leq 180 \\ \text{Sukker:} & 1,5x + y \leq 50 \\ \text{Smør:} & x + y \leq 35 \end{array}$$

Dessuten må x og y være positive.

Løsning:

Klikk på *Likninger* og på *Lineær optimering*. Skriv inn ulikhetene, velg *Største verdi* og klikk OK.

Lineær optimering

Lineær optimering

verdi:

Ulikhet 1:

Ulikhet 2:

Ulikhet 3:

Ulikhet 4:

Ulikhet 5:

Ulikhet 6:

Finn:

OK Avbryt

[6750, [y = 25, x = 10]]

Vi ser at baker Bollerud bør produsere 10 kartonger med boller og 25 kartonger med lefser. Da er inntekten 6750 kroner.

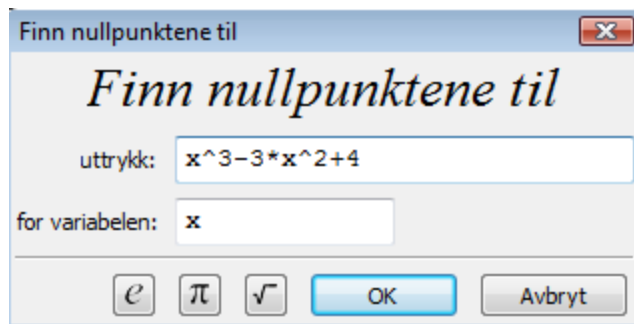
Eksempel 13. Nullpunkter

Oppgave 4.22 b, side 97 i Sinus 1T

Finn nullpunktene til $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Løsning:

Den enkleste måten å løse denne oppgaven på er å bruke hurtigtasten *Nullpunkter*, slik vi viste i eksempel 2. Her viser vi denne alternative løsningsmåten ved å bruke menyvalget *Nullpunkter* i den øverste verktøylinjen. Klikk på *Likninger* og *Nullpunkter*. Skriv inn likningen og klikk OK.



`solve(x^3-3*x^2+4 , x);`
`[x = - 1 , x = 2]`

Eksempel 14. Første ordens differensiallikning

Oppgave 8.13 b og c, side 313 i Sinus R2

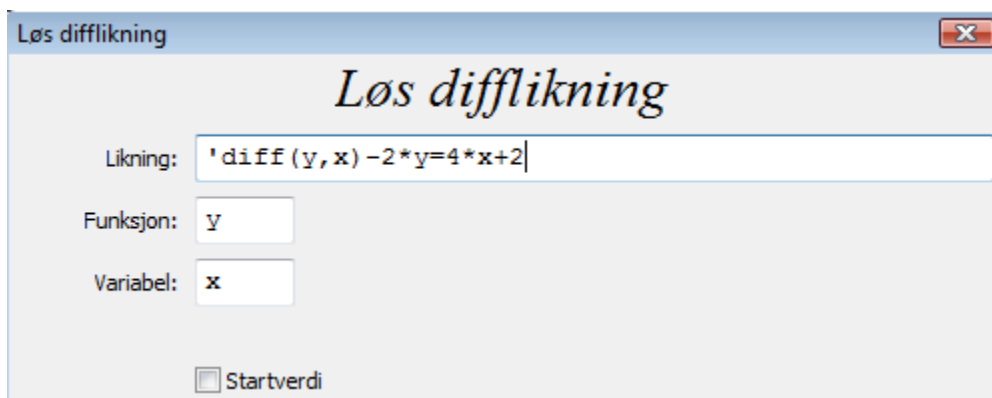
Løs differensiallikningene.

b) $y' - 2y = 4x + 2$ c) $y' + 2y = 8x^2$

Løsning:

b)
Klikk på *Likninger* og *Løs difflikning*. Skriv inn likningen og klikk OK.

Du kan enten bruke knappene for y' og y'' nederst i dialogvinduet eller skrive 'diff(y, x) for y' og 'diff(y,x,2) for y''



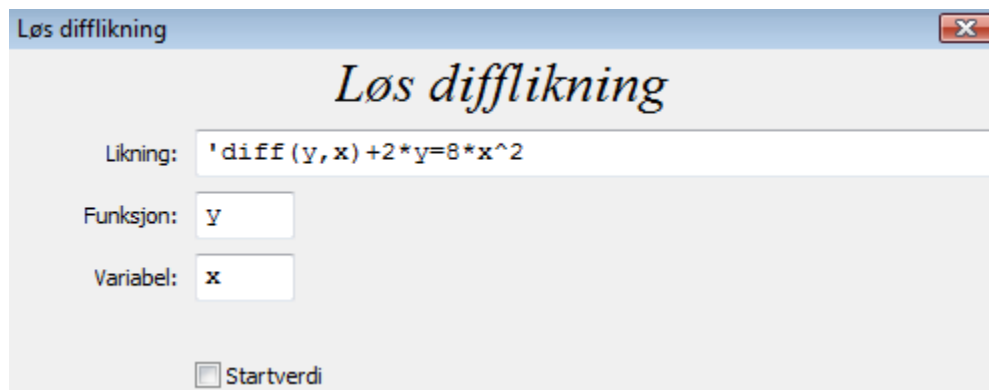
$$y = \left(-(2x + 1) e^{-2x} - e^{-2x} + c \right) e^{2x}$$

Vi klikker på *Utvid* og får et finere svar:

$$y = c e^{2x} - 2x - 2$$

c)

Klikk på *Likninger* og *Løs difflikning*. Skriv inn likningen og klikk OK.



Ved å klikke OK, og deretter *Utvid*, får vi løsningen:

$$y = c e^{-2x} + 4x^2 - 4x + 2$$

Eksempel 15. Første ordens differensiallikning med initialverdier

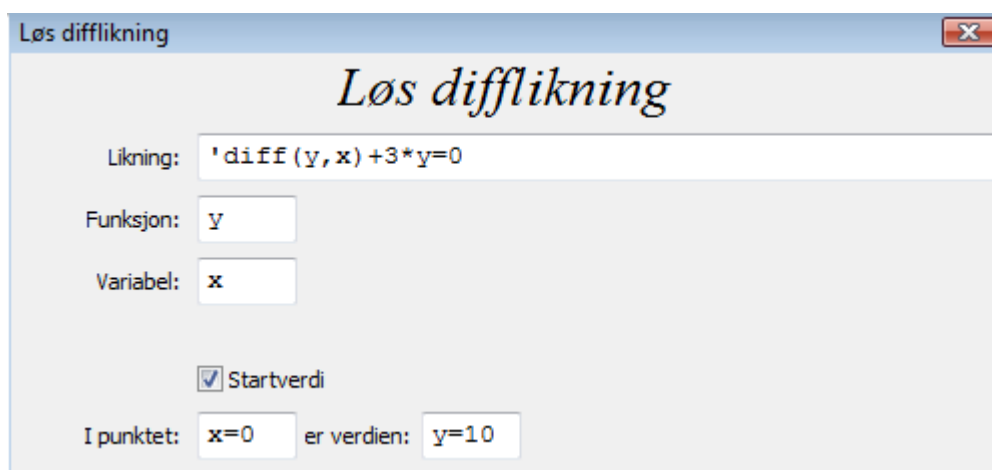
Oppgave 8.12 a, side 312 i Sinus R2

Finn funksjonen y når $y = 10$ for $x = 0$.

$$y' + 3y = 0$$

Løsning:

Klikk på *Likninger* og *Løs difflikning*. Skriv inn likningen og fyll inn betingelsen, slik figuren nedenfor viser. klikk OK.



$$y = 10 \%e^{-3x}$$

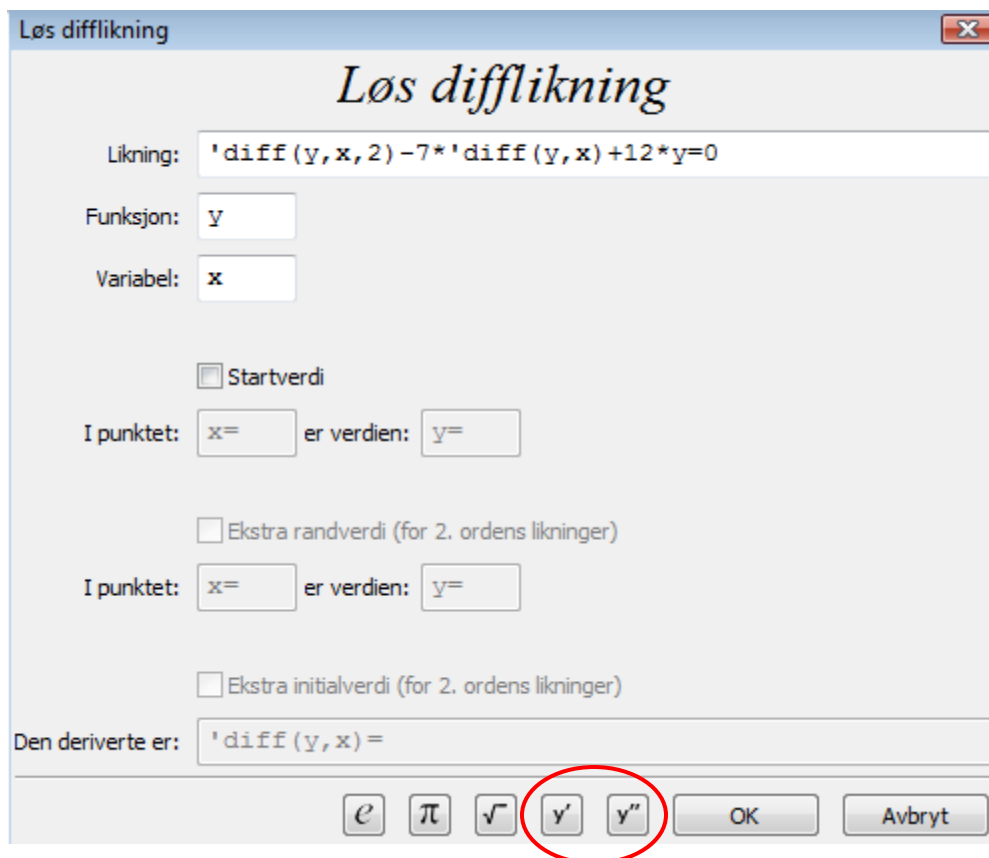
Eksempel 16. Andre ordens differensiallikning

Oppgave 8.61 a, side 333 i Sinus R2

Løs differensiallikning $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Løsning:

Klikk på *Likninger* og *Løs difflikning*. Legg merke til skrivemåten for y'' . Du kan bruke hurtigtastene for å skrive y'' og y' nederst i dialogvinduet.



$$y = \%k1 \%e^{4x} + \%k2 \%e^{3x}$$

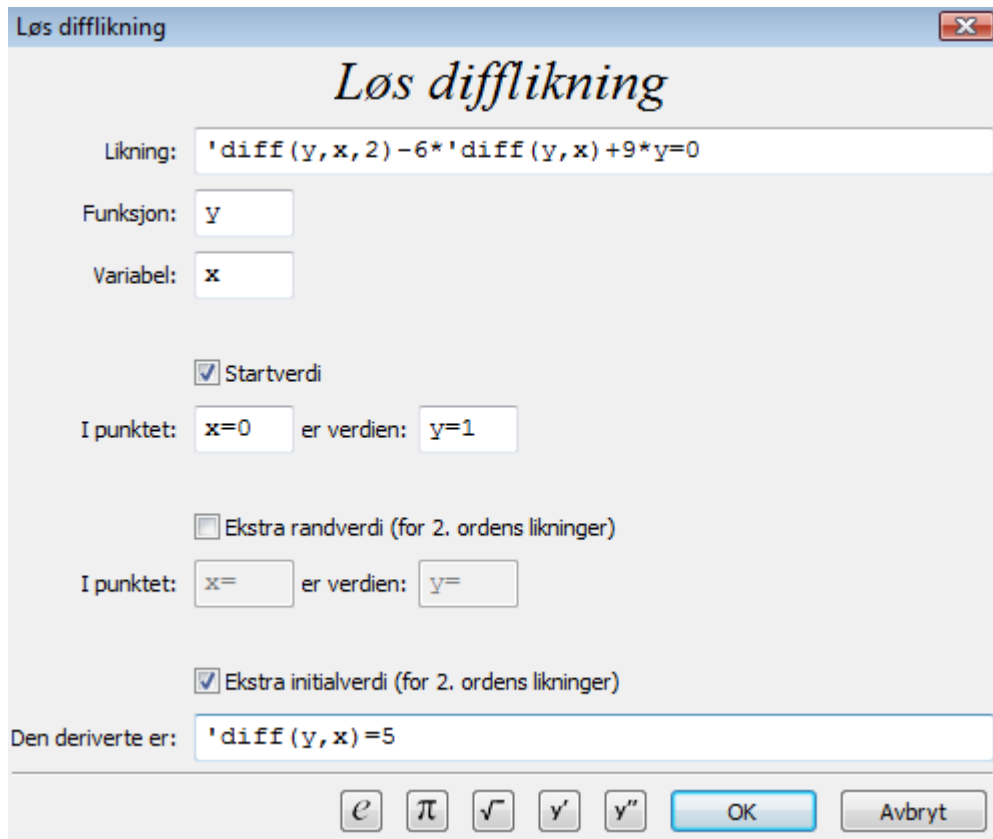
Eksempel 17. Andre ordens differensiallikning med initialverdier

Oppgave 8.62 b, side 335 i Sinus R2

Finn den løsningen av differensiallikningen $y'' - 6y' + 9y = 0$ som er slik at $y = 1$ og $y' = 5$ når $x = 0$.

Løsning:

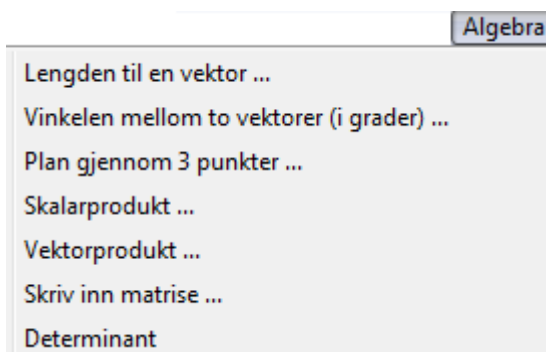
Klikk på *Likninger* og på *Løs difflikning*. Skriv inn likningen og initialverdiene slik figuren nedenfor viser. Klikk OK.



$$y = (2x + 1) e^{3x}$$

Algebra

Vi vil her vise eksempler på de ulike menyvalgene i *Algebra*.



Eksempel 18. Lengden til en vektor

Oppgave 4.40 a, side 154 i Sinus R2

Finn lengden av vektoren $[2, 3, 1]$.

Løsning:

Vi kan selvsagt regne ut lengden av denne enkle vektoren med en lommeregner eller i hodet, men vi tar med dette eksempelet for å vise verktøyet som også kan brukes på vektorer som inneholder brøker og parametere.

Klikk på *Algebra* og på *Lengden av en vektor*. Skriv inn vektoren som tall med komma mellom slik figuren nedenfor viser, og klikk OK.



$$\text{sqrt}([2,3,1] \cdot [2,3,1]);$$
$$\sqrt{14}$$

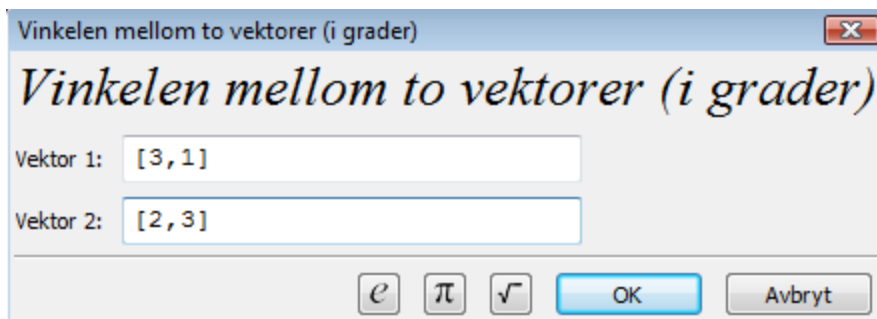
Eksempel 19. Vinkelen mellom to vektorer (i grader)

Oppgave 6.52 a, side 204 i Sinus R1

Finn vinkelen mellom vektorene \vec{u} og \vec{v} når $\vec{u} = [3, 1]$ og $\vec{v} = [2, 3]$.

Løsning:

Klikk på *Algebra* og på *Vinkelen mellom to vektorer (i grader)...*
Skriv inn koordinatene for vektorene og klikk på OK.



Vi kan også skrive inn vektorer med x-, y- og z-koordinater og finne vinkelen mellom vektorer i rommet.

Eksempel 20. Plan gjennom 3 punkter

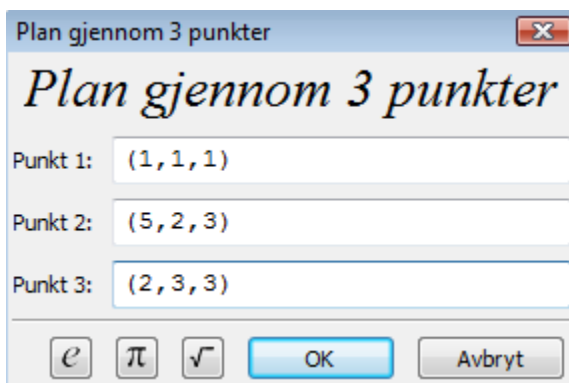
Oppgave 5.14 a, side 192 i Sinus R2

Finn en mulig likning gjennom punktene A , B og C , når punktene har koordinatene $A(1,1,1)$, $B(5,2,3)$ og $C(2,3,3)$.

Løsning:

Klikk på *Algebra* og på *Plan gjennom 3 punkter*.

Fyll inn opplysningene slik figuren øverst på neste side viser. Klikk OK.



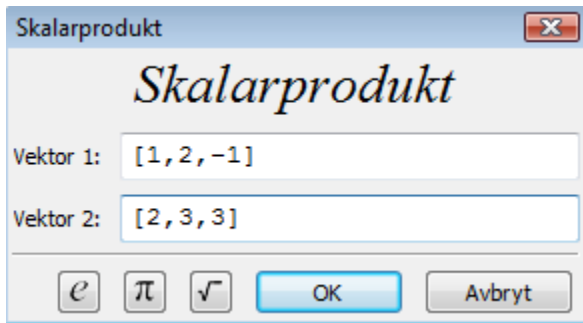
$$z = \frac{6y}{7} + \frac{2x}{7} - \frac{1}{7}$$

Oppgave 4.50 a, side 157 i Sinus R2

Finn skalarproduktet av vektorene $[1, 2, -1]$ og $[2, 3, 3]$.

Løsning:

Klikk på *Algebra* og på *Skalarprodukt*. Klikk OK.



$$[1,2,-1].[2,3,3];$$
$$5$$

Som vi ser, kan vi skrive $[1,2,-1].[2,3,3]$ (med punktum mellom) i stedet for å bruke menyvalget skalarprodukt.

Eksempel 22. Vektorproduktet

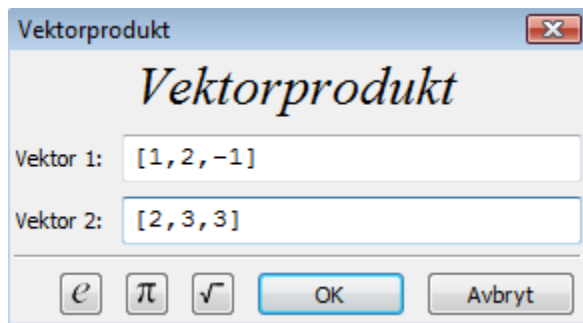
Oppgave 4.80 a, side 175 i Sinus R2

Finn vektorproduktet av vektorene og kontroller at vektorproduktet står vinkelrett på begge vektorene.

$[1, 2, -1]$ og $[2, 3, 3]$

Løsning:

Klikk på *Algebra* og velg *Vektorprodukt*. Skriv inn vektorene slik figuren nedenfor viser, og klikk OK.



$$[9, -5, -1]$$

Vi skal nå sjekke om vektorproduktet står vinkelrett på hver av de opprinnelige vektorene. Det gjør vi ved å skrive inn $[1,2,-1].[9,-5,-1]$ (med punktum mellom) i inntastingsfeltet og trykke *Enter*. Deretter gjør vi det samme med $[2,3,3].[9,-5,-1]$. (Vi kunne selvsagt også ha brukt menyvalget *Skalarprodukt*.)

$[1,2,-1].[9,-5,-1];$

0

$[2,3,3].[9,-5,-1];$

0

Eksempel 23. Matriser og determinanter

Oppgave 4.75 a, side 170 i Snus R2

Finn determinanten ved regning og digitalt.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Løsning:

For å beregne determinanter med *wxMaxima* må vi først skrive inn den tilsvarende matrisen. Klikk på *Algebra* og velg *Skriv inn matrise*. Velg 3×3 matrise og klikk OK.



Klikk OK. Deretter klikker du på *Algebra* og på *Determinant*.

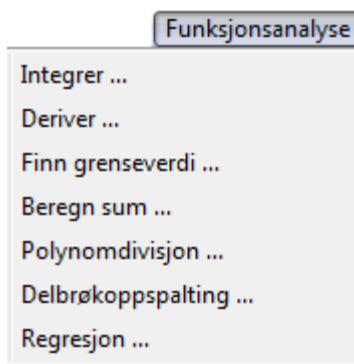
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

determinant(%);

83

Funksjonsanalyse

Vi vil her vise eksempler på de ulike menyvalgene i *Funksjonsanalyse*.



Eksempel 24. Bestemt integral. Eksakt og numerisk løsning

Dersom vi skal finne et bestemt integral, eller dersom det er en annen variabel enn x , må vi bruke menyvalget *Funksjonsanalyse* og *Integrer*.

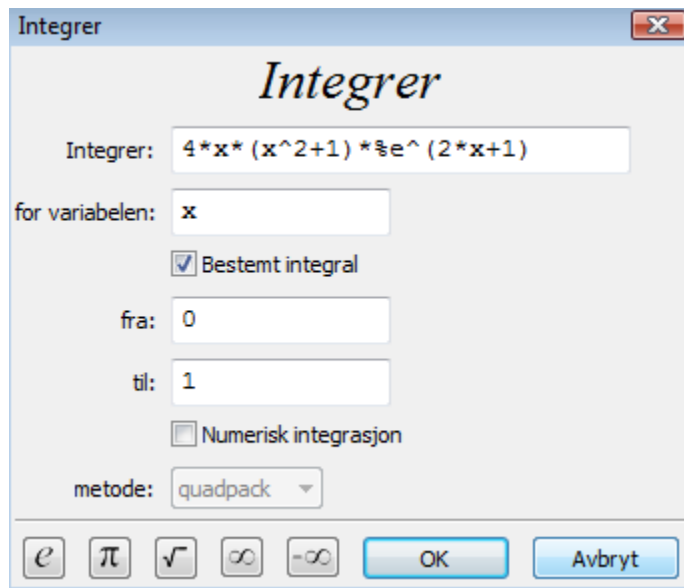
Oppgave 7.42 b, side 292 i Sinus R2

Regn ut $\int_0^1 4x(x^2 + 1)e^{2x+1} dx$.

Løsning:

Klikk på *Funksjonsanalyse* og på *Integrer*.

Skriv inn opplysningene slik de er beskrevet i menyen som er avbildet nedenfor. Klikk OK.



Du får nå den eksakte verdien. Klikk på *Regn* ut for å forekle svaret. Klikk på *Til desimaltall* for å avrunde det til desimaltall.

$$4 \left(\frac{3 \%e^3}{8} + \frac{5 \%e}{8} \right)$$

`wx_compute(%);`

$$\frac{3 \%e^3 + 5 \%e}{2}$$

`wx_float(%);`

36.924

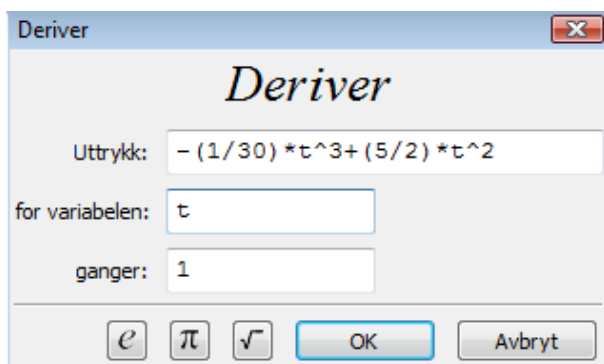
Eksempel 25. Derivasjon

Oppgave 8.45 b, side 222 i Sinus 1T

Finn den deriverte til funksjonen $h(t) = -\frac{1}{30}t^3 + \frac{5}{2}t^2, t \in [0,50]$

Løsning:

Klikk på *Funksjonsanalyse* og deretter på *Deriver*.
Skriv inn uttrykket som vist i figuren nedenfor, og klikk OK.



$$\text{diff}(-(1/30)*t^3+(5/2)*t^2, t);$$

$$5t - \frac{t^2}{10}$$

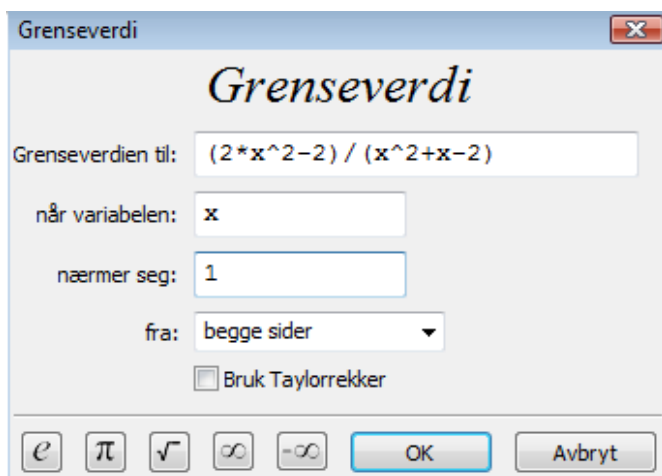
Eksempel 26. Finn grenseverdien

Oppgave 8.13 b, side 211 i Sinus 1T

Finn grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + x - 2}$.

Løsning:

Klikk på *Funksjonsanalyse* og på *Finn grenseverdi*. Klikk OK.



$$\frac{4}{3}$$

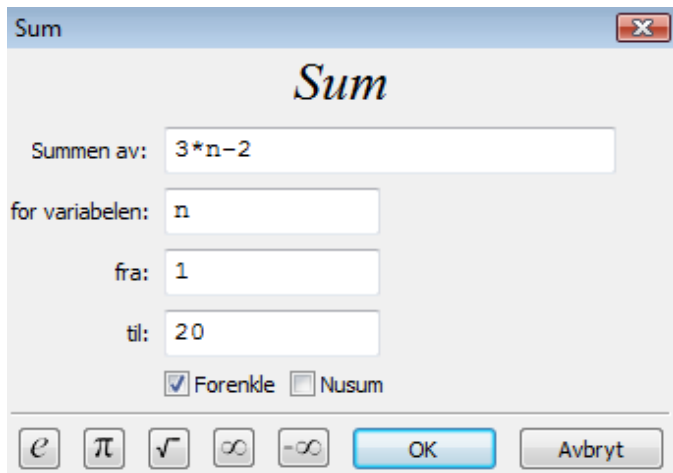
Eksempel 27. Sum av endelige rekker

Oppgave 6.41 b, side 249 i Sinus R2

Leddene i en rekke er gitt ved $a_n = 3n - 2$. Finn summen S_{20} digitalt.

Løsning:

Klikk på *Funksjonsanalyse* og på *Beregn sum*. Fyll opplysningene inn i dialogvinduet slik figuren nedenfor viser. Klikk OK.



`sum(3*n-2, n, 1, 20), simpsum;`
590

Eksempel 28. Sum av uendelige rekker

Oppgave 6.73 a, side 269 i Sinus R2

Finn summen av den uendelige geometriske rekken $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Løsning:

Klikk på *Funksjonsanalyse* og på *Beregn sum*. Fyll opplysningene inn i dialogvinduet slik figuren nedenfor viser. Klikk OK.



`sum(1/2^n, n, 1, inf), simpsum;`
1

Eksempel 29. Å finne formel for sum av rekker

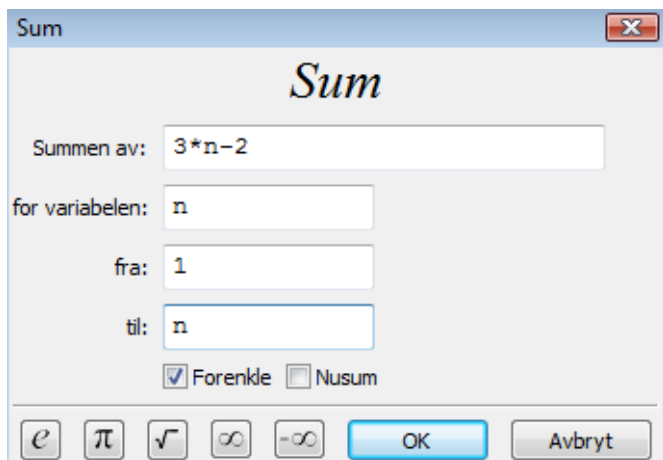
Oppgave 6.41, side 249 i Sinus R2

Dette er en egenprodusert utvidelse av oppgave 6.41 ☺.

Vi kan bruke *wxMaxima* til å finne et generelt uttrykk for summen av de n første leddene i en rekke. Her er $a_n = 3n - 2$, og vi skal finne en generell formel for S_n .

Løsning:

Vi fyller inn opplysningene som i eksempel 27, men her bruker vi n som øvre grense. Klikk OK.



$$\text{sum}(3*n-2, n, 1, n), \text{simpsum};$$
$$\frac{3n^2 + 3n}{2} - 2n$$

Slike generelle formel for summer kan være svært nyttige å finne.

Eksempel 30. Polynomdivisjon

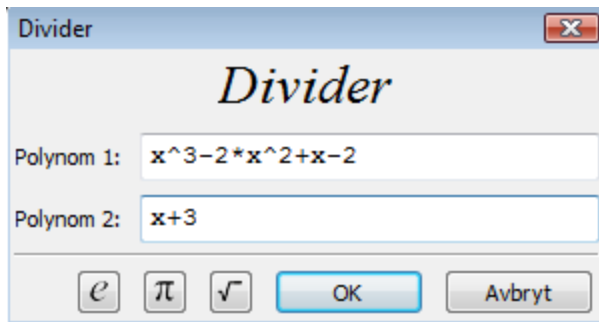
Oppgave 1.40 c, side 23 i Sinus R1

Finn resten uten å dividere. Kontroller svaret ved å utføre divisjonen.

$$(x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x + 3)$$

Løsning:

Vi nøyer oss her med å utføre polynomdivisjonen. Klikk på *Funksjonsanalyse* og på *Polynomdivisjon*. Fyll inn opplysningen som i figuren nedenfor, og klikk OK.



`divide(x^3-2*x^2+x-2, x+3);`
`[x2-5x+16, -50]`

Vi ser at svaret på divisjonen blir $x^2 - 5x + 16$ med rest -50 .

Eksempel 31. Delbrøkkoppspaltning

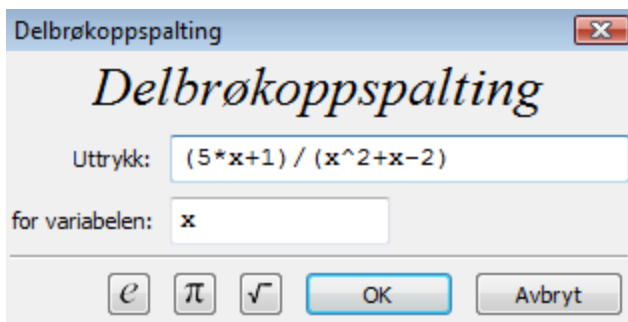
Eksempel side 294–295 i Sinus R2

Skriv $\frac{5x+1}{x^2+x-2}$ som en sum av brøker der nevnerne er førstegradsuttrykk.

Løsning:

Dette gjøres svært enkelt med *wxMaxima*.

Klikk på *Funksjonsanalyse* og på *Delbrøkkoppspaltning*. Skriv inn uttrykket i dialogvinduet slik figuren nedenfor viser. Klikk OK.



`partfrac((5*x+1)/(x^2+x-2), x);`
 $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-1}$

Eksempel 32. Lineær regresjon

Vi vil her vise to eksempler på regresjon med *wxMaxima*. Først en lineær regresjon fra Sinus 1T og deretter en logistisk regresjon fra Sinus R2.

Oppgave 7.22 a, side 194 i Sinus 1T

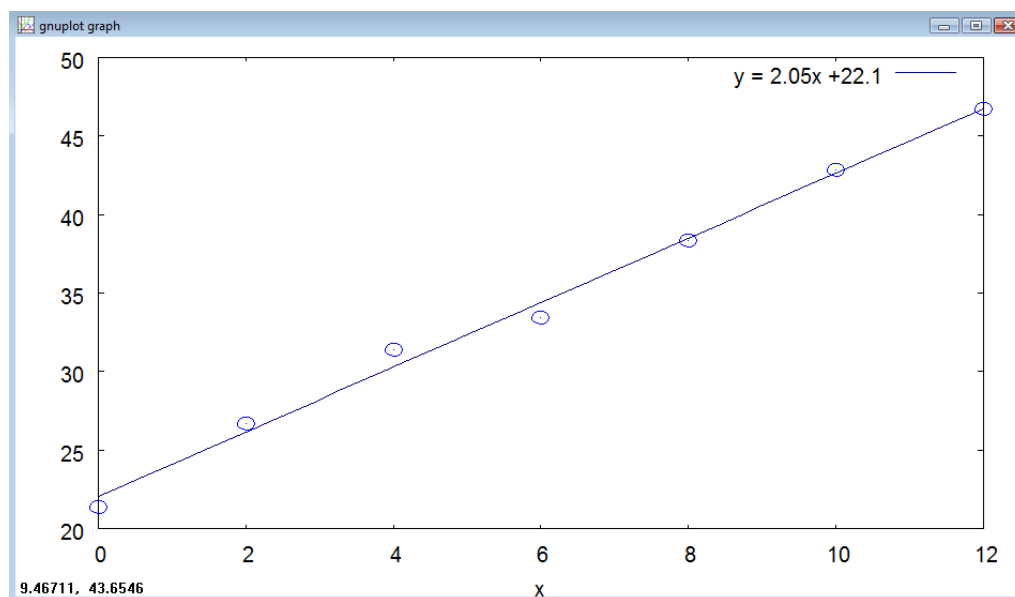
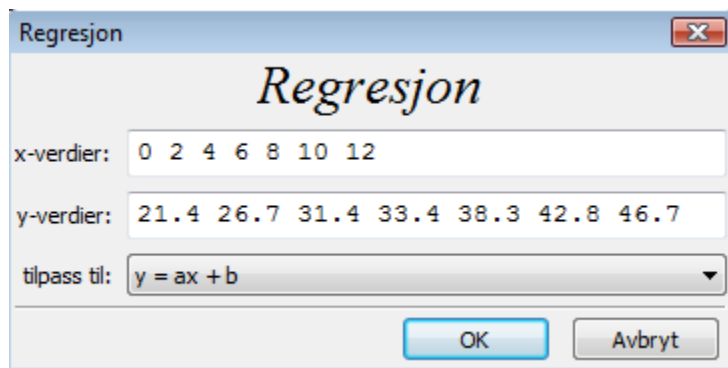
I statistisk årbok finner vi en modell for hvor mye fjørfe som ble slaktet og brukt til folkemat i perioden fra 1993 til 2005. Tabellen viser tallet y på fjørfe i millioner som ble slaktet x år etter 1993.

| Årstall | 1993 | 1995 | 1997 | 1999 | 2001 | 2003 | 2005 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| y | 21,4 | 26,7 | 31,4 | 33,4 | 38,3 | 42,8 | 46,7 |

Lag en lineær modell som viser utviklingen

Løsning:

Åpne wxMaxima. Klikk på *Funksjonsanalyse* og på *Regresjon*.
Skriv inn x -verdiene med mellomrom eller komma mellom. Bruk punktum som desimaltegn. Skriv inn y -verdiene med mellomrom eller komma mellom og klikk på OK.



Lukk grafvinduet ved å klikke på krysset oppe i høyre hjørne. Vi ser da et mer nøyaktig funksjonsuttrykk i programvinduet.

$$f(x) := 2.05357 x + 22.0643$$

Linja har likningen $y = 2,05 x + 22,06$

Eksempel 33. Logistisk regresjon

Eksempel a, side 324 i Sinus R2

Tallet på mobiltelefoner har økt kraftig etter 1990. Tabellen nedenfor viser tallet y på abonnement i tusen, x år etter 1990. Alle tallene gjelder for 1. januar det aktuelle året.

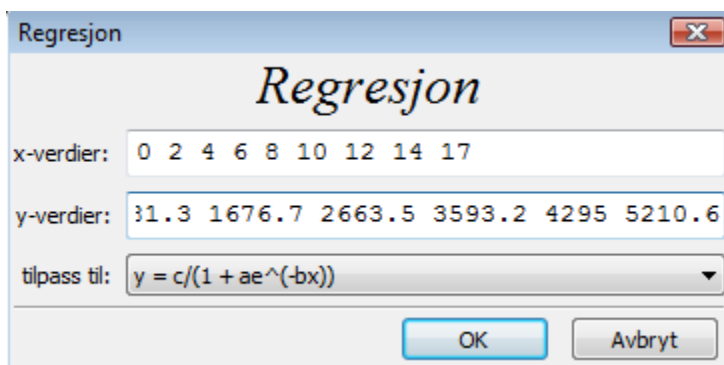
| Årstall | 1990 | 1992 | 1994 | 1996 | 1998 | 2000 | 2002 | 2004 | 2007 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x (år) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 17 |
| y (tusener) | 180,6 | 234,4 | 368,5 | 981,3 | 1676,7 | 2663,5 | 3593,2 | 4295,0 | 5210,6 |

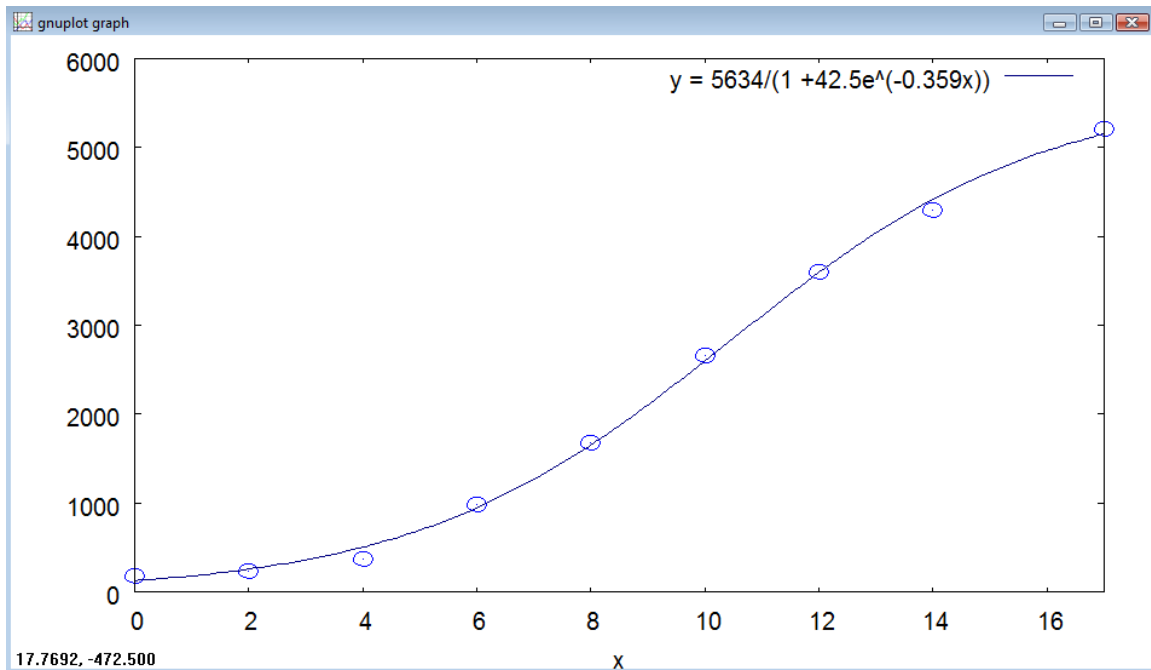
Bruk et digitalt hjelpemiddel og finn den logistiske funksjonen som passer best med tallene i tabellen. Tegn grafen sammen med datapunktene.

Løsning:

Klikk på *Funksjonsanalyse og Regresjon*.

Skriv inn tallene med mellomrom eller komma mellom. Velg funksjonsuttrykket for *Logistisk regresjon* og klikk OK.



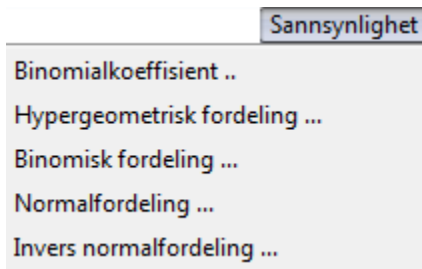


Lukk dette vinduet ved å klikke på krysset oppe i høyre hjørne. Du får da funksjonsuttrykket med flere desimaler.

$$f(x) := \frac{5634.29}{1 + 42.5156 \%e^{(-0.3593) x}}$$

Sannsynlighet

Vi vil her vise eksempler på de ulike menyvalgene i *Sannsynlighet*.



Eksempel 34. Binomialkoeffisient

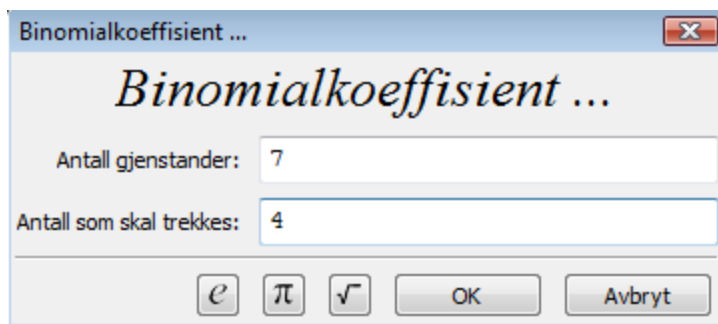
Oppgave 9.83, side 269 i Sinus 1T

Vi velger fire epler blant sju. Hvor mange måter kan dette gjøres på?

Løsning:

Slike problemer løses raskest med en enkel lommeregner, men vi vil vise hvordan dette kan gjøres i *wxMaxima*.

Klikk på *Sannsynlighet* og på *Binomialkoeffisient*. Fyll inn tallene slik figuren nedenfor viser.



`binom(7, 4);`
35

Som vi ser, kan vi også skrive `binom(7,4)` direkte i inntastingsfeltet og trykke *Enter*.

Eksempel 35. Hypergeometrisk fordeling

Oppgave 3.86 a, side 117 i Sinus R1

På en liten skole er det 30 jenter og 20 gutter. Vi velger tilfeldig 8 elever på denne skolen.

Hva er sannsynligheten for at det er 5 jenter og 3 gutter blant de 8 når du bruker en hypergeometrisk modell?

Løsning:

Klikk på *Sannsynlighet* og på *Hypergeometrisk forsøk*. Fyll inn dialogvinduene slik figuren øverst på neste side viser, og klikk OK.

Hypergeometrisk fordeling ...

Hypergeometrisk fordeling ...

Antall av type 1 (n1): 30

Antall av type 2 (n2): 20

Totalt antall som trekkes (r1+r2): 8

Trekkes av type 1 (r1): = 5

eller: ≤ r1 ≤

OK Avbryt

0.3026

Eksempel 36. Binomisk fordeling

Oppgave 9.95, side 273 i Sinus 1T

Det har nettopp vært valg og 20 % av velgerne stemte på Høyre. Vi velger tilfeldig 500 personer som har stemt ved valget. La X være tallet på høyrevelgere blant dem.

- a) Finn $P(X = 100)$
- b) Finn $P(X \leq 110)$
- c) Finn $P(X > 110)$
- d) Finn $P(X \geq 90)$
- e) Finn $P(90 \leq X \leq 110)$

Løsning:

Klikk på *Sannsynlighet* og på *Binomisk fordeling*. Fyll inn dialogvindue slik figurene viser og klikk OK.

a)

Binomisk fordeling ...

Binomisk fordeling ...

Antall som skal trekkes (n): 500

Sannsynlighet for treff (p): 0.2

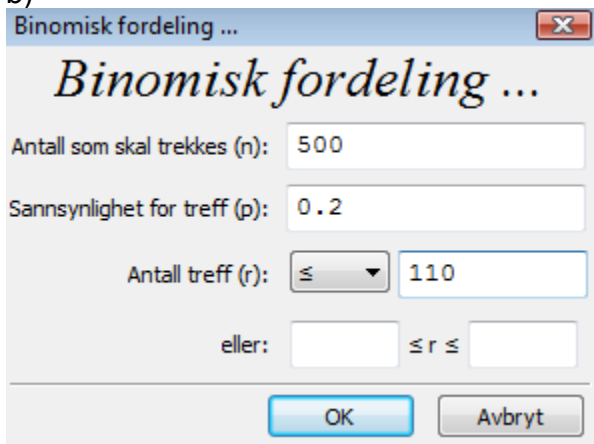
Antall treff (r): = 100

eller: ≤ r ≤

OK Avbryt

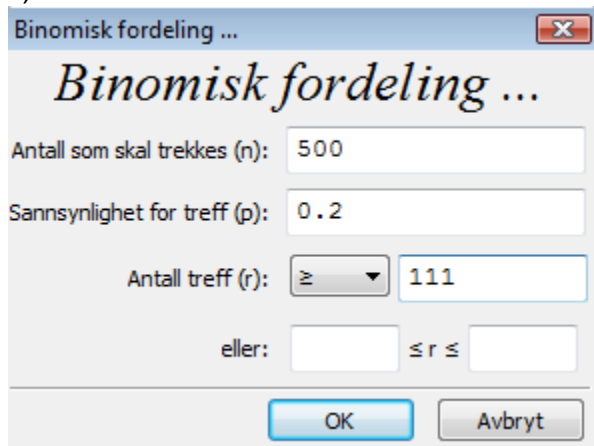
`float(pdf_binomial(100,500,0.2));`
0.04456

b)



```
load(distrib)$  
float(cdf_binomial(110,500,0.2));  
0.879
```

c)

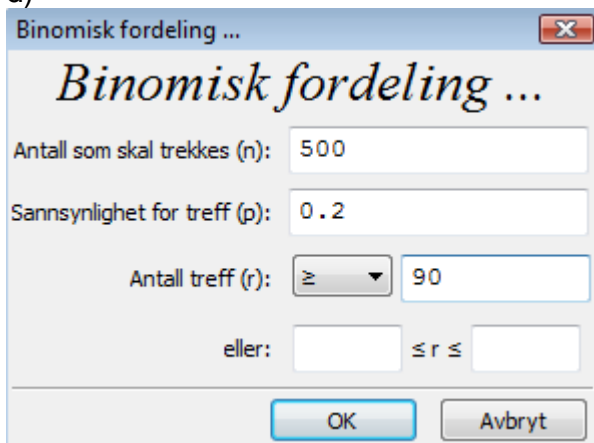


OBS. Legg merke til at det står 111 på grunn av at det står >110 i oppgaven. Vi opererer med hele tall.

```
float(1 - cdf_binomial(110,500,0.2));  
0.121
```

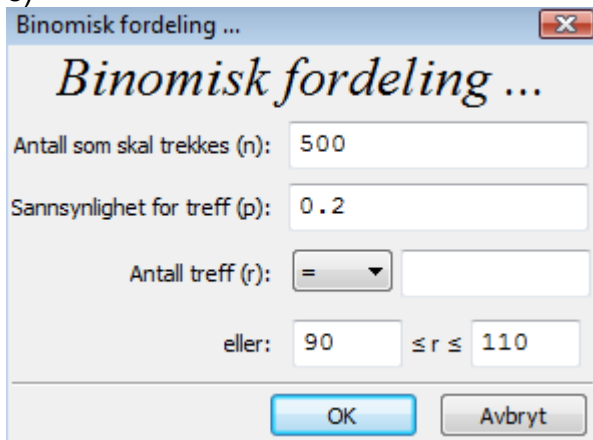
Her kunne vi selvsagt også regnet ut $1 - 0,879$.
(1 minus svaret vi fant i oppgave b.)

d)



```
float(1 - cdf_binomial(89,500,0.2));  
0.8807
```

e)



0.7597

Eksempel 37. Normalfordeling

Oppgave 8.20 a, side 253 i Sinus S2

La X være gjennomsnittshøyden for en tilfeldig valgt norsk rekrutt. Vi forutsetter her at X er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 180$ cm og standardavvik $\sigma = 7$ cm. Regn ut $P(175 < X < 185)$.

Løsning:

Klikk på *Sannsynlighet* og deretter på *Normalfordeling*. Fyll inn verdiene slik figuren nedenfor viser. Klikk OK.



```
float(cdf_normal(185,180,7)-cdf_normal(175,180,7));
```

0.5249

Eksempel 38. Normalfordeling og invers normalfordeling

Eksempel side 275 i Sinus S2

Høyden til norske rekrutter er normalfordelt med forventningsverdien 180,0 cm og standardavviket 7,0 cm. Ola Nordmann påstår at svenske rekrutter er lavere. Han plukker tilfeldig ut 100 svenske rekrutter og finner at gjennomsnittshøyden er 179.1 cm.

- Gir dette grunnlag for å si at svenske rekrutter er lavere enn norske rekrutter?
- Finn den største gjennomsnittshøyden rekruttene kunne ha hvis vi skulle kunne si at svenskene er lavere.

Bruk signifikansnivå 0,05.

Løsning:

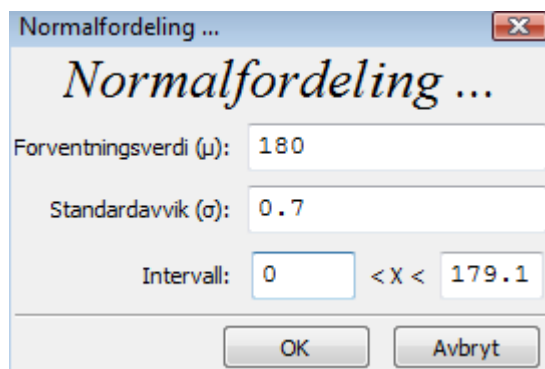
Vi lar X være høyden til en tilfeldig valgt svensk rekrutt. Vi antar at X er normalfordelt med forventningsverdi μ og standardavviket $\sigma = 7,0$ cm.

La \bar{X} være gjennomsnittshøyden til 100 tilfeldig valgte svenske rekrutter. Da er \bar{X} normalfordelt med forventningsverdien μ og standardavviket

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

For å finne $P(\bar{X} \leq 179,1)$ går vi fram slik i wxMaxima:

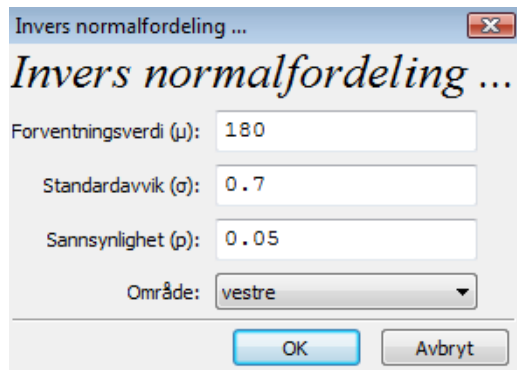
- Klikk på *Sannsynlighet* og på *Normalfordeling*. Fyll inn verdiene slik figuren nedenfor viser og klikk OK.



0.09927

Da P -verdien er større enn signifikansnivået 0,05, har ikke Ola Nordmann grunn til å si at svenskene er lavere, ut fra dette utvalget på 100 rekrutter.

- b) Klikk på *Sannsynlighet* og på *Invers normalfordeling*.
Skriv inn opplysningene slik figuren nedenfor viser og klikk OK.

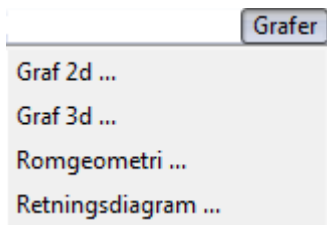


`quantile_normal (0.05,180,0.7);`
178.849

For at vi skal kunne si at svenske rekrutter er lavere enn norske, må gjennomsnittshøyden blant 100 tilfeldig valgte rekrutter være høyst 178,8 cm.

Grafer

Vi vil her til slutt vise eksempler på de ulike menyvalgene i *Grafer*.



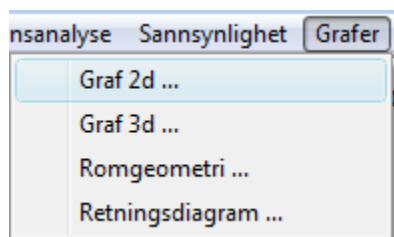
Eksempel 39. Grafer i planet

Oppgave 4.24 a, side 97 i Sinus1T

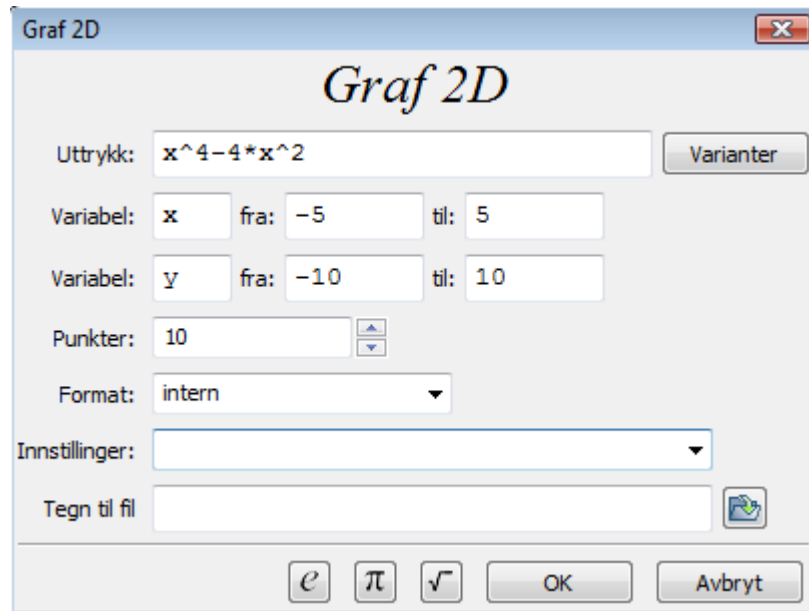
$f(x) = x^4 - 4x^2$. Tegn grafen til f .

Løsning:

Trykk *Enter*. Klikk på *Grafer* på verktøylinja øverst i programmet og velg *Graf 2d*.

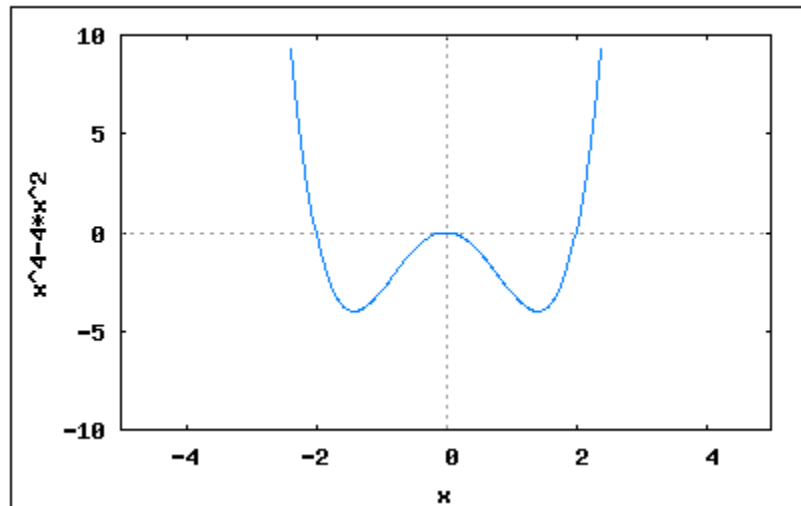


Skriv inn funksjonsuttrykket i feltet for *Uttrykk* og klikk OK.



Resultatet blir:

`wxplot2d([f(x)], [x,-5,5], [y,-10,10])$`



Dersom vi lar variabelen y gå fra 0 til 0 (standardinnstillinger), vil *wxMaxima* selv finne riktige y -verdier ut fra definisjonsmengden.

Eksempel 40. Parametrisk graf i 2D

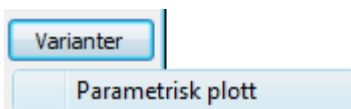
Oppgave 8.73 a, side 293 i Sinus R1

En kurve K har parameterframstillingen $K: \begin{cases} x=1-t \\ y=t+t^2 \end{cases}$

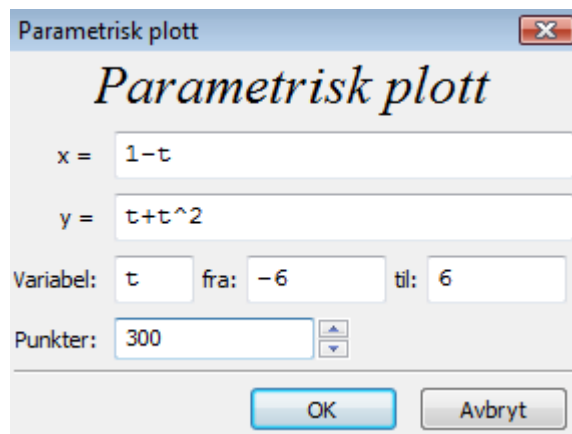
Tegn kurven K .

Løsning:

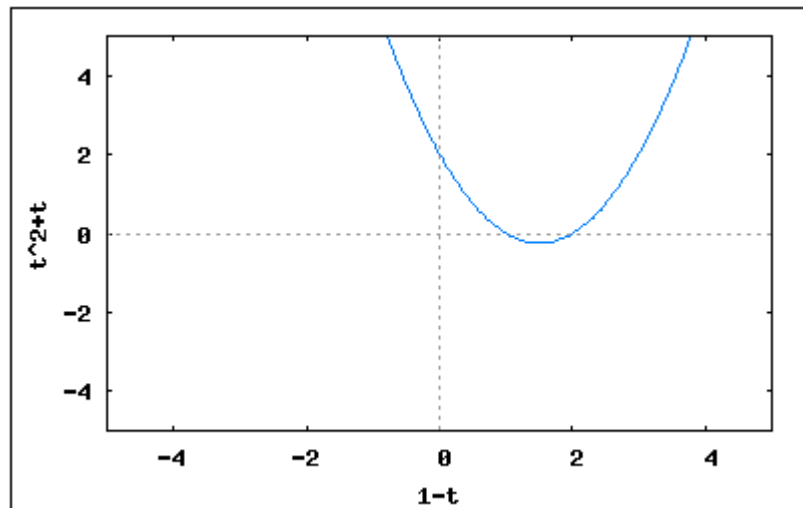
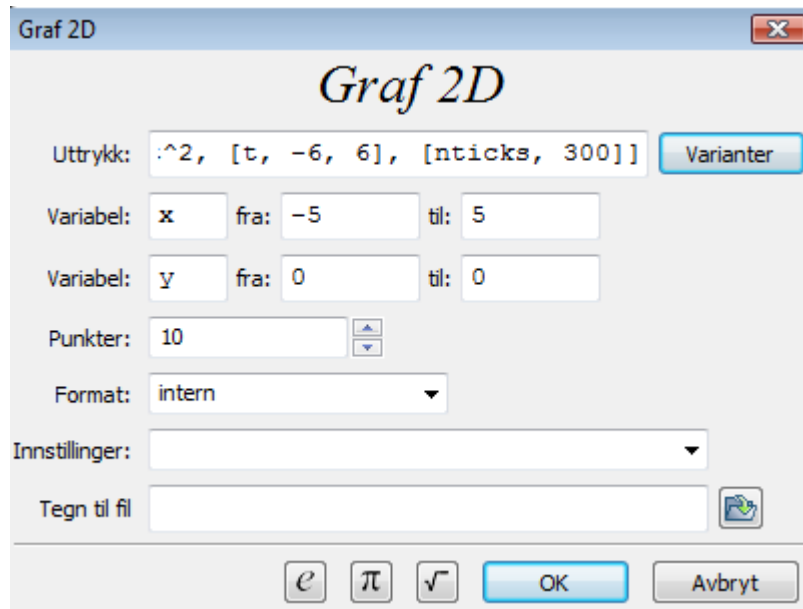
Klikk på *Grafer* og på *Graf 2d...* Klikk på *Varianter* og velg *Parametrisk plott*.



Skriv inn opplysningene slik figuren øverst på neste side viser, og klikk OK.



La både x -aksen og y -aksen gå fra -5 til 5 . Klikk OK.

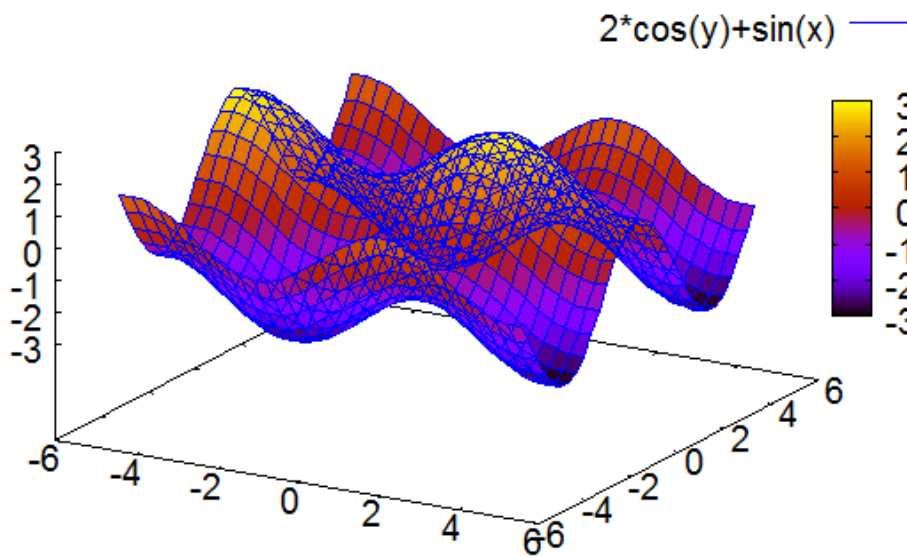
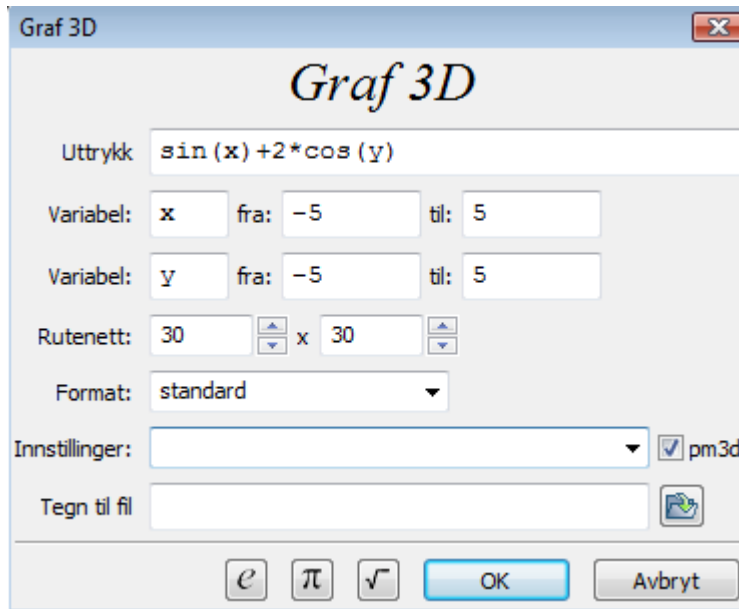


Eksempel 41. Grafer i rommet

Til plotting av plan, vektorer, linjer m.m. i 3D er programmet Autograph mye bedre egnet enn *wxMaxima*, men det er ikke gratis.

Vi vil her likevel gi et lite eksempel på et 3D-plott med *wxMaxima*.
Klikk på *Grafer* og velg *Graf 3d*.

Vi velger $z = \sin(x) + 2 \cdot \cos(y)$. Her må vi altså ordne likningen slik at vi får den på formen $z = \dots$



Eksempel 42. Romgeometri

Oppgave 5.11 a, side 190 i Sinus R2

Undersøk om punktene $A(3,1,-3)$ og $B(2,-1,-1)$ og $C(-1,5,2)$ ligger i planet med likningen $2x + 3y - 3z - 4 = 0$

Løsning:

Ved å bruke *wxMaxima* kan vi danne oss et bilde av situasjonen, uten at dette er et fullgodt bevis for at punktene ligger i planet eller ikke

Klikk på *Grafer* og velg *Romgeometri*.

Fyll inn opplysningene slik figuren nedenfor viser og klikk OK.

Romgeometri

Romgeometri

Punkter:

O: A: B: C: D:

T: E: F: G: H:

Linjestykker og vektorer

a:

b:

c:

d:

e:

f:

g:

h:

Kule:

Radius: Sentrum:

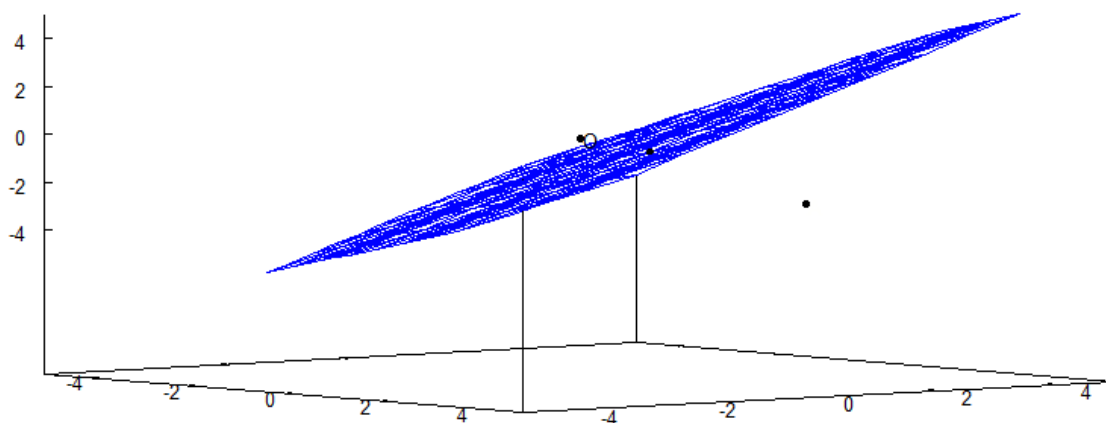
Overflater

Likning 1:

Likning 2:

Variabler: x: - y: - z: -

OK Avbryt



Ved å dreie på figuren i *wxMaxima*, ser vi at bare ett av punktene (*B*) ligger i planet.

Eksempel 43. Retningsdiagram

Oppgave 8.51 a, side 330 i Sinus R2

Tegn et retningsdiagram for differensiallikningen $2yy' = e^x + 2$.

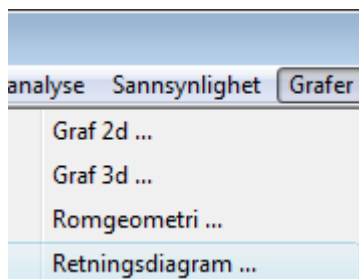
Løsning:

For å tegne retningsdiagram i *wxMaxima* må likningen være på formen $y' =$.

I vårt eksempel her blir likningen for den deriverte $y' = \frac{e^x + 2}{2y}$.

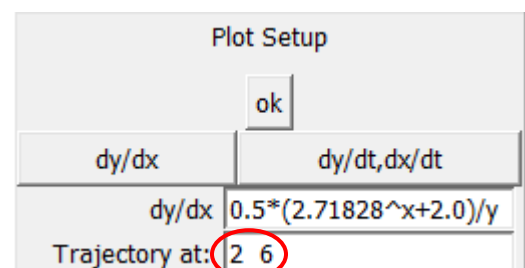
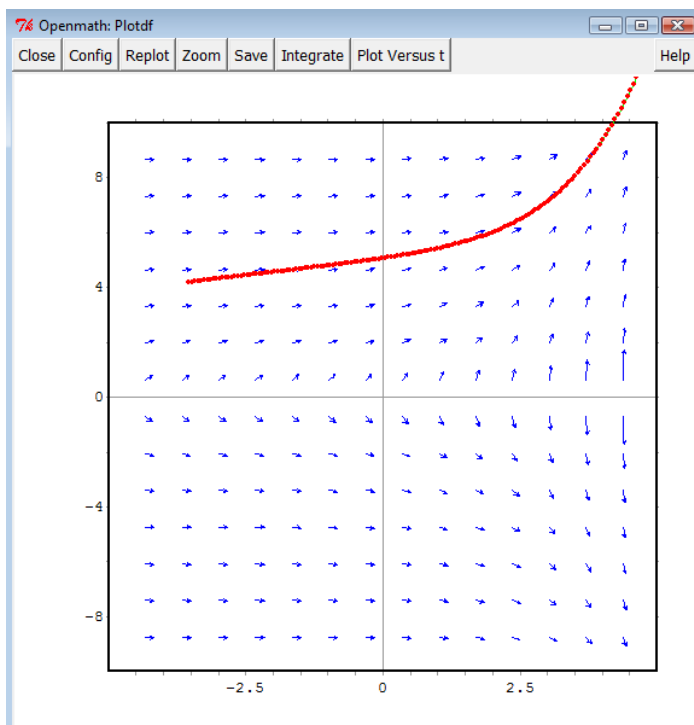
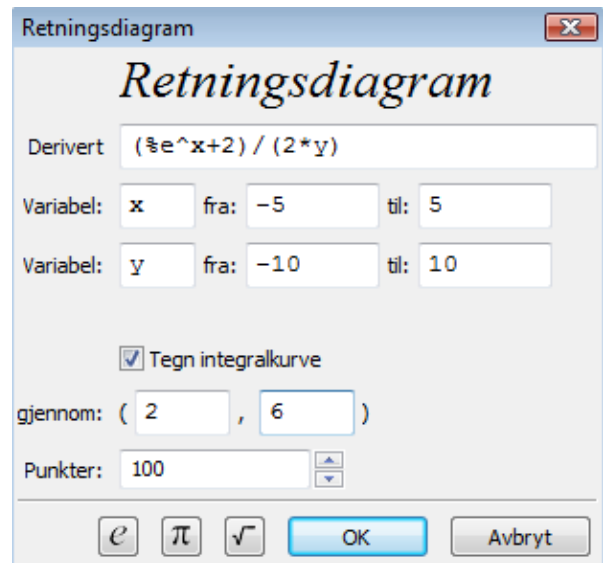
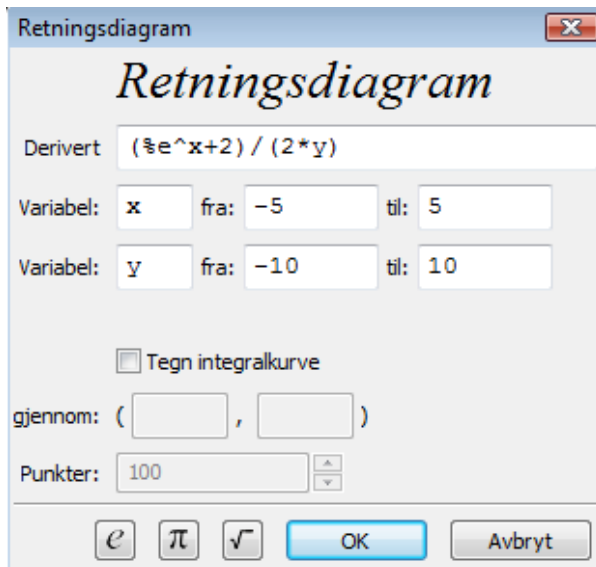
Klikk på menyvalget *Grafer* og deretter *Retningsdiagram*.

Skriv inn uttrykket for den deriverte og klikk OK.



Det kan gå noen sekunder før retningsdiagrammet blir tegnet.

Dersom du ønsker å tegne noen integralkurver i retningsdiagrammet, kan du klikke på et punkt i diagrammet.



Dersom du ønsker å tegne en integralkurve gjennom for eksempel punktet (2, 6), kan du gjøre dette på tre måter:

1. Merk av for *Tegn integralkurve* som vist på figuren øverst til høyre på denne siden.
2. Klikk på på punktet (2,6) på grafen.
3. Klikk du på *Config* og skriv inn 2 mellomrom 6 bak *Trajectory at* og trykker Enter.